

Braun

E 1357 E

ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG

Unter Mitarbeit von

H. Busch, R. Feldtkeller, E. Hölzler, K. Hoffmann, O. Kirchner
E. Kramar, A. Mehlis, W. Nestel, H. Piloty, L. Pungs, F. Schröter, W. O. Schumann
M. Seddig, A. Siemens, R. Tamm, R. Theile, F. Tank, R. Vieweg, G. Wuckel

Begründet von

KARL WILLY WAGNER

Schriftleitung:

H. Döring, J. Piesch, J. Schunack, M. Strutt, A. Thoma, H.-G. Unger

Geschäftsführende Redaktion:

F. Rühmann

BAND 15

DEZEMBER 1961

HEFT 12

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

KWR

Trägerfrequenzkabel

KABELWERK RHEYDT AKT.-GES.

RHEYDT (RHLD.)

INHALT

Originalmitteilungen:	Seite
Ersatzschaltbild, Verstärkung und Bandbreite parametrischer Wanderfeldverstärker mit gesteuerten Kapazitäten von <i>W. Heinlein</i>	547
Reiterative Wave Beams of Rectangular Symmetry . . . by <i>F. Schwering</i>	555
Kathodenstrahlröhren mit Nachablenkung von <i>W. Thommen</i>	565
Vertikale Bewegungsvorgänge in der nächtlichen Ionosphäre von <i>W. Becker</i>	569
Der Einfluß der Raumladung auf das Verhalten von Anlaufstromdioden von <i>H. Pötzl</i>	578
Quantitative Transformationsvorgänge in einem rauscharmen Strahlerzeugungssystem von <i>K.-B. Niclas</i>	587
Zuschrift zum Beitrag „J. Vratsanos, Zur Berechnung der Stromverteilung in einem linearen Netzwerk“ . . . von <i>R. G. de Buda</i>	599
Buchbesprechungen	599

ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG

Schriftleitung:

Prof. Dr.-Ing. H. Döring,
Aachen, Templergraben 55, Fernruf 422 24 40

Dr. phil. J. Piesch
Wien IV/50, Karlsplatz 13, Fernruf 65 76 41

Dr.-Ing. J. Schunack,
Berlin-Lichterfelde 1, Drakestraße 1a, Fernruf 73 22 61

Prof. Dr.-Ing. E. h. Dr. techn. M. Strutt,
Zürich 7, Gloriastraße 35, Fernruf 32 73 30

Oberstudiendirektor Dr. phil. A. Thoma,
Fulda, Leipziger Straße 2,
Fernruf (vorm.) 29 62, (nachm.) 44 28

Prof. Dr.-Ing. H.-G. Unger,
Braunschweig, Mühlenpfordtstraße 23, Fernruf 3 08 11

Geschäftsführende Redaktion und Anzeigenverwaltung:

Ing. Friedrich Rühmann
Karlsruhe-Durlach, Machstraße 4, Fernruf 428 54

Alle Zuschriften werden entweder an die Schriftleitung oder an die Geschäftsführende Redaktion erbeten.

Die Zeitschrift erscheint in Monatsheften. Es werden aufgenommen:

- Originalmitteilungen in knapper Darstellung;
- Zusammenfassende Berichte, nach vorheriger Verabredung über Inhalt, Form und Umfang mit der Schriftleitung;
- Buchbesprechungen;
- Kurze fachliche Mitteilungen und Zuschriften;
- Mitteilungen über Tagesereignisse auf dem Fachgebiet der Zeitschrift;
- Persönliche Nachrichten.

Geschäftliche Hinweise:

Der Bezug des Archivs der elektrischen Übertragung durch Verlag, Post und Buchhandel ist im Abonnement zum Preis von DM 20,— für das Vierteljahr möglich. Einzelhefte können zum Preis von DM 7,— geliefert werden.

Anzeigenaufträge und -anfragen bitten wir an die Anzeigenverwaltung der Zeitschrift zu richten.

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART
Postscheckkonto Stuttgart 64383

ALUMINIUM- MANTEL-KABEL

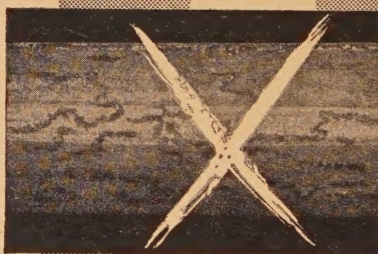
mit Duolitschutz

korrosionssicher



korrosionssicher

korrosionssicher



NEUMEYER

KABEL-UND METALLWERKE NEUMEYER AG NÜRNBERG 2

Fordern Sie unverbindlich unsere Druckschrift 2012

ARCHIV

DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG (A.E.Ü.)

Unter Mitarbeit von H. Busch, R. Feldtkeller, E. Hölzler, K. Hoffmann, O. Kirchner, E. Kramar, A. Mehliß, W. Nestel, H. Piloty, L. Pungs, F. Schröter, W. O. Schumann, M. Seddig, A. Siemens, R. Tamm, F. Tank, R. Theile, R. Vieweg, G. Wuckel

Begründet von KARL WILLY WAGNER

Schriftleitung: H. Döring, J. Piesch, J. Schunack, M. Strutt, A. Thoma, H.-G. Unger

Geschäftsführende Redaktion: F. Rühmann

S. HIRZEL VERLAG, Stuttgart

Band 15

Dezember 1961

Heft 12

Ersatzschaltbild, Verstärkung und Bandbreite parametrischer Wanderfeldverstärker mit gesteuerten Kapazitäten*

VON WALTER HEINLEIN

Mitteilung aus dem Zentral-Laboratorium der Siemens & Halske AG, München

(A.E.Ü. 15 [1961], 547–554; eingegangen am 17. August 1961)

DK 621.375.9

Mit Hilfe der Ersatzschaltbilder einer gesteuerten Kapazität und der Wellenleitung eines parametrischen Wanderfeldverstärkers (Kettenschaltung verlustfreier Vierpole) wird auf eine allgemeine und physikalisch anschauliche Weise die Wellenverstärkung abgeleitet. Für den praktisch wichtigen Fall, daß die Wellenleitung Bandpaßcharakter besitzt und die gesteuerten Kapazitäten durch Halbleiterdioden realisiert sind, wird ein oberer Grenzwert für das Produkt aus Verstärkung je Diode und relativer Bandbreite abgeleitet. Dieser Grenzwert beträgt im sogenannten entarteten Fall (Signalfrequenzbereich in der Umgebung der halben Pumpfrequenz) etwa 2 dB je Diode. Aus fremden und eigenen experimentellen Ergebnissen lassen sich für das genannte Produkt Werte bis etwa 1,35 dB je Diode entnehmen; das sind etwa 70% des möglichen Höchstwertes.

With the aid of the equivalent circuits of a controlled capacitance and of the waveguide of a parametric travelling-wave amplifier (cascade connection of loss-free fourpoles) the wave amplification is derived in a general, physically illustrative manner. For the practically important case that the waveguide has band-pass character and the controlled capacitances are realized by semiconductor diodes, an upper limit is derived for the product of gain per diode by relative bandwidth. In the so-called degenerated case (signal frequency range near half the pump frequency) this limit is approximately 2 dB per diode. From experimental results found by the author and others, values up to about 1.35 dB per diode can be taken for the aforementioned product; this is about 70% of the possible maximum.

1. Einleitung

Die hier betrachteten parametrischen Wanderfeldverstärker bestehen aus einer Wellenleitung, in deren Leitungszug in gleichen Abständen gesteuerte Kapazitäten¹ angeordnet sind. Die Steuerfrequenz der Kapazitäten wird allgemein als Pumpfrequenz ω_p bezeichnet. Die Steuerschwingungen zweier aufeinanderfolgender gesteuerter Kapazitäten haben eine konstante Phasenverschiebung, so daß man von einer Pumpphasengeschwindigkeit sprechen kann. Längs der Wellenleitung breiten sich die Signalwelle der Frequenz ω_1 und die Differenzfrequenzwelle (die sogenannte Idling-Welle) der

Frequenz $\omega_2 = \omega_p - \omega_1$ aus. Die Existenz der Welle mit der Differenzfrequenz ist eine Voraussetzung dafür, daß die gesteuerten Kapazitäten überhaupt Wirkleistung bei der Signalfrequenz abgeben können. Für die Signalwellen-Verstärkung besteht ferner die notwendige Bedingung, daß die Phasengeschwindigkeiten der Signal- und der Differenzfrequenzwelle einander gleich sind und mit der Phasengeschwindigkeit der Pumpwelle übereinstimmen [1], [2]. Ist diese Bedingung erfüllt, so spricht man von Phasensynchronismus. In diesem Fall kann jede gesteuerte Kapazität der Signalwelle (und ebenso der Differenzfrequenzwelle) Wirkleistung zuführen, so daß man eine gleichmäßige Verstärkung längs der Wellenleitung erhält.

Die Berechnung der Wanderfeldverstärkung vereinfacht sich sehr, wenn man den Phasensynchronismus völlig unabhängig von der Stärke der Kapazitätssteuerung voraussetzt, wie es verschiedene Autoren getan haben [1], [2], [3]. In der Praxis ist jedoch der Phasensynchronismus für geringe Aussteuerung der Kapazitäten fast nie genau erfüllt;

* Erweiterte Fassung eines Kurzreferates, das unter der Überschrift „Relation between amplification and bandwidth of parametric travelling-wave amplifiers using varactor diodes“ auf der Tagung „Low Noise Electronics“ des Avionics Panels der AGARD in Oslo am 31. Juli 1961 gehalten wurde.

¹ Unsere Ausführungen gelten entsprechend auch für parametrische Wanderfeldverstärker mit gesteuerten Induktivitäten.

dieser stellt sich vielmehr erst mit zunehmender Aussteuerung ein. Den Einfluß einer solchen anfänglichen Abweichung vom Phasensynchronismus auf die Verstärkung haben TIEN [4] und HEILMEIER [5] untersucht. Ihre Ergebnisse folgen jedoch aus einem mathematischen Formalismus, der die zugrunde liegenden physikalischen Vorgänge kaum erkennen läßt.

Die vorliegende Arbeit versucht in ihrem ersten Teil, die parametrische Wanderfeldverstärkung näherungsweise auf eine physikalisch anschauliche Art abzuleiten, aus der verständlich wird, wie trotz mangelndem Phasensynchronismus der passiven Wellenleitung (d.h. bei verschwindend kleiner Aussteuerung der Kapazitäten) bei zunehmender Aussteuerung ein Phasensynchronismus zustande kommen kann. Die gesteuerten Kapazitäten erzeugen nämlich zunächst solche Blindleitwerte, daß die Abweichung vom Phasensynchronismus abgebaut wird. Erst wenn dieser erreicht ist und die Aussteuerung der Kapazitäten weiter vergrößert wird, können diese solche negativen Wirkleitwerte erzeugen, daß eine gleichmäßige Verstärkung längs der Wellenleitung erreicht wird. Zu unserem Zweck betrachten wir die Wellenleitung des parametrischen Wanderfeldverstärkers als Kettenschaltung verlustfreier Vierpole und benutzen die Ersatzschaltung einer sinusförmig gesteuerten Kapazität.

Im zweiten Teil der Arbeit nehmen wir an, daß die gesteuerten Kapazitäten durch verlustfreie Halbleiterdioden realisiert sind, die durch Pumpspannungen hinreichend großer Amplituden und geeigneter Phasen gesteuert werden. Ferner nehmen wir an, daß die Vierpole, aus denen sich die Wellenleitung des Wanderfeldverstärkers zusammensetzt, Bandpaßcharakter besitzen und als einzige konzentrierte Kapazitäten nur die unvermeidlichen Grundkapazitäten der Halbleiterdioden enthalten. Für drei praktisch wichtige Bandpaßstrukturen berechnen wir die Verstärkung je Diode bei der Bandmittelfrequenz und die bestenfalls mögliche Bandbreite der Verstärkung.

2. Die Ersatzschaltung einer gesteuerten Kapazität

Die gesteuerten Kapazitäten betrachten wir als reine Wechselkapazitäten der Amplitude ΔC und der Frequenz ω_p (siehe Bild 1). Liegen an den Klemmen der Wechselkapazität zwei Wechselspannungen der Frequenzen² ω_1 und ω_2 , so hat der Strom vier Komponenten der Frequenzen ω_1 , ω_2 , $\omega_p + \omega_1$ und $\omega_p + \omega_2$. Die Ströme der beiden Summenfrequenzen seien kurzgeschlossen und werden nicht weiter betrachtet. Für die Ströme i_1 und i_2 ergibt eine einfache Rechnung die Ausdrücke

$$\begin{aligned} i_1 &= -\frac{1}{2} \omega_1 \Delta C U_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_p - \varphi_2), \\ i_2 &= -\frac{1}{2} \omega_2 \Delta C U_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_p - \varphi_1), \end{aligned} \quad (1)$$

² Der Index 1 oder 2 bezeichnet hier durchweg den Funktionswert bei der Signalfrequenz ω_1 bzw. bei der Differenzfrequenz $\omega_2 = \omega_p - \omega_1$.

mit deren Hilfe sich in bekannter Weise [6] die Ersatzscheinleitwerte Y_1 und Y_2 berechnen lassen,

$$\begin{aligned} Y_1 &= G_1 + j \omega_1 C_1 = -\frac{1}{2} \omega_1 \Delta C \frac{U_2}{U_1} e^{j \Delta \varphi}, \\ Y_2 &= G_2 + j \omega_2 C_2 = -\frac{1}{2} \omega_2 \Delta C \frac{U_1}{U_2} e^{j \Delta \varphi}; \end{aligned} \quad (2)$$

in Gl. (12) ist

$$\Delta \varphi = \varphi_p - \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3)$$

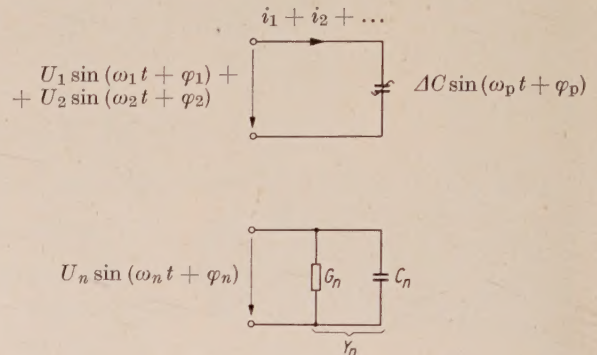


Bild 1. Gesteuerte Kapazität und Ersatzschaltbild für die Signalfrequenz ($n = 1$) und die Differenzfrequenz ($n = 2$).

Die betrachtete Wechselkapazität läßt sich also durch eine Ersatzschaltung gemäß Bild 1 darstellen. Die Beträge der Ersatzscheinleitwerte Y_1 und Y_2 hängen neben der Frequenz nur von den Amplituden ab, während die Phasen dieser Leitwerte nur von den Phasen der beteiligten Schwingungen abhängen. Wie man sieht, stellt die gesteuerte Kapazität für die Signalfrequenz nur bei endlicher Differenzfrequenzspannung einen endlichen Leitwert dar. Wenn die Phasendifferenz $\Delta \varphi$ gemäß Gl. (3) verschwindet, sind die Leitwerte Y_1 und Y_2 reell und negativ. Dieser Fall ist in allen parametrischen Verstärkern anzustreben.

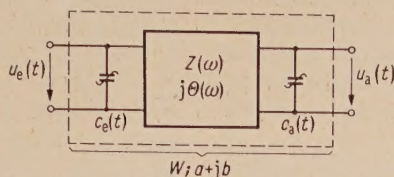
3. Die Wellenleitung

Die Wellenleitung eines parametrischen Wanderfeldverstärkers mit gesteuerten Querkapazitäten kann man auffassen als eine Kettenschaltung von Vierpolen gemäß Bild 2. Die Wechselkapazitäten am Eingang und am Ausgang des Vierpoles haben je die Amplitude $\Delta C/2$ und eine gegenseitige Phasenverschiebung Φ_p . Die unvermeidlichen Grundkapazitäten, die bei der Verwirklichung von Wechselkapazitäten auftreten, seien im inneren, verlustlosen Vierpol von Bild 2 enthalten, der ein Glied der passiven Wellenleitung ist. Der Wellenwiderstand Z dieses inneren Vierpoles sei reell für alle Signalfrequenzen ω_1 und die zugehörigen Differenzfrequenzen ω_2 , jedoch imaginär für alle Summenfrequenzen $\omega_p + \omega_1$ und $\omega_p + \omega_2$, so daß sich Wellen dieser Frequenzen nicht ausbreiten können.

Die Vierpole der betrachteten Kettenschaltung sind nicht völlig identisch, sondern unterscheiden

sich im Phasenwinkel φ_p der Wechselkapazitäten derart, daß die parallel geschalteten Wechselkapazitäten des Ausgangs und Eingangs benachbarter Vierpole gleichphasig sind.

In Bild 3 ist die Ersatzschaltung des Vierpols von Bild 2 dargestellt. Es bedeuten $Y_e/2$ und $Y_a/2$ die Ersatzscheinleitwerte der entsprechenden Wechselkapazitäten.



$$\begin{aligned} c_e(t) &= \frac{1}{2} \Delta C \sin(\omega_p t + \varphi_p) & c_a(t) &= \frac{1}{2} \Delta C \sin(\omega_p t + \varphi_p - \Phi_p) \\ u_e(t) &= U_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) & u_a(t) &= U_1 e^{-a_1} \sin(\omega_1 t + \varphi_1 - b_1) + U_2 e^{-a_2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2 - b_2) \\ \omega_p &= \omega_1 + \omega_2 & \Phi_p &= \theta_1 + \theta_2 + \Delta\theta \\ \varphi_p &= \varphi_1 + \varphi_2 + \Delta\varphi & \Phi_p &= b_1 + b_2 + \Delta b \end{aligned}$$

Bild 2. Vierpolglied der Wellenleitung eines parametrischen Wanderfeldverstärkers mit gesteuerten Querkapazitäten.

Der Vierpol von Bild 2 ist wegen der Wechselkapazitäten im allgemeinen unsymmetrisch. Da wir die Wechselkapazitäten als hinreichend klein voraussetzen (siehe weiter unten), können wir ihn in jedem Fall näherungsweise als symmetrisch betrachten. Sein Wellenwiderstand W stimmt dann ungefähr mit dem Wellenwiderstand Z des inneren Vierpols von Bild 2 überein; sein Wellenübertragungsmaß sei $a + jb$. Eingangs- und Ausgangsspannung des Vierpols von Bild 2 setzen sich im Betrieb je aus einer Signal- und einer Differenzfrequenzkomponente zusammen, die in Bild 2 eingetragen sind. Ist die Wellendämpfung $a < 0$, so verstärkt der Vierpol. Seine Phase b ist im allgemeinen von θ , der Wellenphase des inneren Vierpols von Bild 2, verschieden.

Für die passive Wellenleitung ($\Delta C = 0$) besteht Phasensynchronismus, wenn die Phasendifferenz

$$\Delta\theta = \Phi_p - \theta_1 - \theta_2 \quad (4)$$

verschwindet.

Für die aktive Wellenleitung ($\Delta C > 0$) besteht Phasensynchronismus, wenn die Phasendifferenz

$$\Delta b = \Phi_p - b_1 - b_2 \quad (5)$$

verschwindet. Für den Betrieb des parametrischen Wanderfeldverstärkers ist $\Delta b = 0$ erforderlich. Im Fall $\Delta\theta \neq 0$ kann, wie im folgenden gezeigt wird, die Bedingung $\Delta b = 0$ nur dann erfüllt sein, wenn die Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_1 - \varphi_2$ (siehe Gl. (3)) ungleich Null ist.

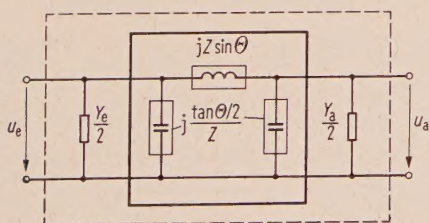


Bild 3. Ersatzschaltbild des Vierpols von Bild 2.

Mit den Bezeichnungen von Bild 2 gilt

$$\begin{aligned} \frac{Y_{e1}}{2} &= -\frac{\omega_1 \Delta C}{4} \frac{U_2}{U_1} e^{j\Delta\varphi}, \\ \frac{Y_{a1}}{2} &= -\frac{\omega_1 \Delta C}{4} \frac{U_2}{U_1} e^{a_1 - a_2} e^{j(\Delta\varphi - \Delta b)}, \\ \frac{Y_{e2}}{2} &= -\frac{\omega_2 \Delta C}{4} \frac{U_1}{U_2} e^{j\Delta\varphi}, \\ \frac{Y_{a2}}{2} &= -\frac{\omega_2 \Delta C}{4} \frac{U_1}{U_2} e^{-(a_1 - a_2)} e^{j(\Delta\varphi - \Delta b)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Sind diese Leitwerte hinreichend klein, d. h.

$$\left| \frac{Y_{en} + Y_{an}}{4} Z_n \right| \ll 1 \quad (n = 1, 2), \quad (7)$$

so ist das Wellenübertragungsmaß für die beiden Frequenzen ω_1 und ω_2 näherungsweise³

$$a_n + jb_n = j\theta_n + \frac{Y_{en} + Y_{an}}{4} Z_n \quad (n = 1, 2). \quad (8)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4} \sqrt{\omega_1 \omega_2} \Delta C \sqrt{Z_1 Z_2}, \\ k &= \sqrt{\frac{\omega_1 Z_1}{\omega_2 Z_2}} \frac{U_2}{U_1} \end{aligned} \quad (9)$$

und den Gl. (6) lassen sich die beiden Wellenübertragungsmaße des betrachteten Vierpols wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} a_1 + jb_1 &= j\theta_1 - \frac{a_0}{2} k e^{j\Delta\varphi} (1 + e^{a_1 - a_2 - j\Delta b}), \\ a_2 + jb_2 &= j\theta_2 - \frac{a_0}{2} \frac{1}{k} e^{j\Delta\varphi} (1 + e^{-(a_1 - a_2) - j\Delta b}). \end{aligned} \quad (10)$$

Verstärkung bzw. Dämpfung der Signal- und der Differenzfrequenzwelle sind also im allgemeinen

³ Diese Näherung entspricht der bekannten Näherung für den Ausdruck der Dämpfung eines Kabels mit endlicher Ableitung.

verschieden und noch abhängig von dem Spannungsverhältnis U_2/U_1 , das seinerseits von den vorangeschalteten Vierpolen in der Wellenleitung des Verstärkers abhängt. Im allgemeinen sind also die Verstärkungen der einzelnen Vierpolglieder der Wellenleitung nicht gleich und nicht voneinander unabhängig. Die Gl. (10) gestatten es, das Verhalten einer parametrischen Wellenleitung unter den gemachten Voraussetzungen sehr allgemein zu untersuchen.

Von besonderem Interesse ist der Fall gleichmäßiger Wellenverstärkung. Befindet sich der Vierpol von Bild 2 als Glied in einer sehr langen Ketten-schaltung gleicher Vierpole und sind durch Pumpen fortschreitende, anwachsende Wellen der Frequenz ω_1 und ω_2 angeregt, so muß Phasensynchronismus bestehen, d.h. für die zugehörigen Phasenwinkel muß $b_1 + b_2 = \Phi_p$ gelten (vergleiche Anhang). In diesem Fall stammen die beiden Wellenleistungen praktisch ganz aus den gesteuerten Kapazitäten (die Leistung, die der Signalgenerator am Anfang der Leitung liefert, kann man dann vernachlässigen), so daß sie im Verhältnis der Frequenzen stehen müssen [3]:

$$\frac{U_1^2/Z_1}{U_2^2/Z_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (11)$$

Also müssen die Wellenverstärkungen gleich sein, $a_1 = a_2 = a$, wie sich mit $k=1$ auch aus den Gl. (10) ergibt. Die Scheinleitwerte der Wechselkapazitäten haben dann gemäß den Gl. (6) die gleiche Größe, $Y_e = Y_a$. Die Gl. (10) liefern für die Wellenübertragungsgrößen

$$a = -a_0 \cos \Delta\varphi, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \theta_1 - a_0 \sin \Delta\varphi, \\ b_2 &= \theta_2 - a_0 \sin \Delta\varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Im allgemeinen besteht für die passive Wellenleitung kein Phasensynchronismus, d.h. es ist $\Delta\theta \neq 0$ (siehe Gl. (4)). Aus diesem Grund sind die Scheinleitwerte der Wechselkapazitäten nicht reell, sondern besitzen eine Blindkomponente, die durch den endlichen Phasenwinkel $\Delta\varphi$ gegeben ist. Aus den Gl. (13) folgt nämlich

$$\sin \Delta\varphi = -\frac{\Delta\theta}{2a_0}. \quad (14)$$

Ist also für die passive Wellenleitung der Phasensynchronismus nicht erfüllt, so erzeugen die Wechselkapazitäten Blindleitwerte, die den Phasenfehler verringern und bei einer gewissen Mindestamplitude der Wechselkapazitäten ganz beseitigen. Die erforderliche Mindestamplitude findet man aus Gl. (14), wenn man bedenkt, daß $a_0 \geq |\Delta\theta|/2$ sein muß. Es besteht also für die aktive Wellenleitung Phasensynchronismus, sobald

$$\Delta C \geq \frac{2|\Delta\theta|}{\sqrt{\omega_1 \omega_2} \sqrt{Z_1 Z_2}}. \quad (15)$$

Ist die Ungleichung (15) erfüllt, so erhält man eine gleichmäßige Verstärkung längs der Wellenleitung. Gemäß den Gl. (12) und (14) liefert zu dieser Ver-

stärkung jedes Vierpolglied den Beitrag [4], [5]

$$-a = \sqrt{a_0^2 - \left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^2} \text{ Neper}. \quad (16)$$

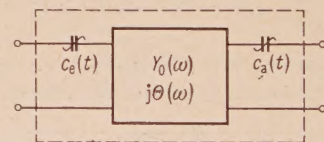
Die Verstärkung verschwindet, sobald $|\Delta\theta| = 2a_0$ ist. In diesem Fall reichen die Kapazitätsamplituden ΔC gerade zur Erzeugung solcher Blindleitwerte aus, daß der Phasensynchronismus $\Delta b = 0$ zwar erreicht wird, jedoch keine Verstärkung mehr möglich ist. Nach Gl. (16) beeinträchtigen mäßige Phasenfehler $\Delta\theta$ die Verstärkung nur wenig, z.B. beträgt für einen Phasenfehler von $|\Delta\theta| = a_0$ die Verstärkung noch 86% von a_0 .

Solange die Ungleichung (15) nicht erfüllt ist, werden gleichmäßig anwachsende Wellen nicht angeregt, und es ist $\Delta b \neq 0$. Dies hat zur Folge, daß sich die Ersatzscheinleitwerte Y_e und Y_a um den Winkel Δb in ihrer Phase unterscheiden. In einer langen Kette solcher Vierpole werden dann verstärkende und dämpfende Leitwerte Y vorkommen, so daß sich insgesamt keine Verstärkung ergibt, sondern nur ein periodischer Energieaustausch zwischen den Wellen der Frequenzen ω_1 und ω_2 einerseits und den gesteuerten Kapazitäten andererseits [4].

Völlig analoge Ergebnisse erhält man, wenn man einen parametrischen Wanderfeldverstärker betrachtet, der mit gesteuerten Längskapazitäten arbeitet. Das in Bild 4 dargestellte Vierpolglied eines solchen Wanderfeldverstärkers liefert bei passivem Phasensynchronismus $\Delta\theta = 0$ und gleichen Voraussetzungen, wie bisher angenommen, die Verstärkung

$$a_0 = \frac{1}{4} \frac{\Delta S}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \sqrt{Y_{01} Y_{02}} \text{ Neper}. \quad (17)$$

Hierbei bedeutet ΔS die Amplitude der gesteuerten Elastanz⁴ und Y_0 den Wellenleitwert des inneren Vierpols von Bild 4.



$$\frac{1}{c_e(t)} = \frac{\Delta S}{2} \sin(\omega_p t + \varphi_p) \quad \frac{1}{c_a(t)} = \frac{\Delta S}{2} \sin(\omega_p t + \varphi_p - \Phi_p)$$

Bild 4. Vierpolglied der Wellenleitung eines parametrischen Wanderfeldverstärkers mit gesteuerten Längskapazitäten.

4. Verstärkung und Bandbreite

Herkömmliche Verstärker, wie Röhren- und Transistorverstärker, kann man durch das sogenannte Bandbreite-Verstärkungs-Produkt charakterisieren. Im folgenden wollen wir versuchen, eine ähnliche charakteristische Größe für parametrische Wanderfeldverstärker abzuleiten, die mit Kapazi-

⁴ Als Elastanz bezeichnen wir den Kehrwert der Kapazität.

tätsdioden betrieben werden. Dabei setzen wir die Kapazitätsdioden als verlustlos voraus und vernachlässigen den Einfluß parasitärer Reaktanzen.

Mit gesteuerten Querkapazitäten erreicht man nach Abschnitt 3 große Verstärkungen, wenn man große Kapazitätsamplituden ΔC und große Wellenwiderstände Z wählt. Bei Halbleiterdioden bedeutet jedoch eine Vergrößerung von ΔC im allgemeinen auch eine Vergrößerung der Grundkapazität C_0 , wodurch der Wellenwiderstand herabgesetzt und, bzw. oder, die Bandbreite verringert wird. Bei gegebener Bandmittelfrequenz ω_m sind deshalb, wie sich zeigen wird, der gleichzeitigen Vergrößerung von Verstärkung und Bandbreite Grenzen gesetzt. Entsprechendes gilt für Wanderfeldverstärker, die mit gesteuerten Längskapazitäten arbeiten (und für die dualen Anordnungen mit gesteuerten Induktivitäten).

Bei der Abschätzung, wie weit sich Bandbreite und Verstärkung gleichzeitig vergrößern lassen, beschränken wir uns auf entartete Wanderfeldverstärker, deren Verstärkungsmittelfrequenz ω_m mit der halben Pumpfrequenz ω_p zusammenfällt. Wir betrachten den insbesondere bei höheren Frequenzen praktisch wichtigen Fall, daß die als verlustfrei vorausgesetzten Kopplungsvierpole zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kapazitätsdioden Bandpaßcharakter besitzen. Bei dieser Betrachtung sehen wir die unvermeidlichen Grundkapazitäten der Dioden als Bestandteil der Kopplungsvierpole an und setzen voraus, daß diese Grundkapazitäten die einzigen konzentrierten Kapazitäten sind, die die Kopplungsvierpole enthalten.

Mit heute verfügbaren Kapazitätsdioden lassen sich Wechselkapazitäten bzw. Wechsel elastanzen erzeugen, deren Amplituden ΔC bzw. ΔS bestenfalls⁵ etwa 50% der Grundkapazität C_0 bzw. Grundelastanz S_0 ausmachen. Größere Verhältnisse erreicht man nur durch Aussteuerung der Dioden in den Durchlaßbereich, was man jedoch im allgemeinen vermeidet, um nicht die Güte der Diodenkapazität herabzusetzen. Im folgenden rechnen wir daher mit einem Verhältnis 1/2 zwischen Wechselamplitude und Grundwert von Kapazität bzw. Elastanz.

Mit diesen Voraussetzungen beträgt die Wellenverstärkung bei der Bandmittelfrequenz $\omega_m = \omega_p/2$ für einen Vierpol nach Bild 2

$$a_m = \frac{1}{8} \omega_m C_0 Z_m \quad \text{Neper} \quad (18)$$

und für eine Vierpol nach Bild 4

$$a_m = \frac{1}{8} \frac{S_0}{\omega_m} Y_{0m} \quad \text{Neper}. \quad (19)$$

Wir nehmen weiterhin an, daß die Frequenz ω_m mit der Mittelfrequenz des Durchlaßbereiches der Kopplungsvierpole zusammenfällt und daß im ganzen Durchlaßbereich Phasensynchronismus gegeben ist. Dann fällt die totale Bandbreite der Verstärkung (das ist die Bandbreite, in der überhaupt

Verstärkung auftritt) mit der Bandbreite $\Delta\omega$ des Durchlaßbereiches der Kopplungsvierpole zusammen, nimmt also ihren größtmöglichen Wert an. In der Praxis dürften diese günstigen Voraussetzungen kaum je erfüllt sein.

Wir bilden nun das Produkt ε aus der Verstärkung a_m bei der Bandmittelfrequenz ω_m und der relativen Verstärkungsbandbreite $\delta = \Delta\omega/\omega_m$. Wie sich später zeigen wird, ist dieses Produkt, das wir als Effektivität ε bezeichnen wollen, kennzeichnend für die hier behandelten parametrischen Wanderfeldverstärker. Im Gegensatz zum Bandbreite-Verstärkungs-Produkt herkömmlicher Verstärker geht in die hier definierte Effektivität nur die relative und nicht die absolute Bandbreite ein. Nach Gl. (18) gilt für einen Wanderfeldverstärker mit Querdioden

$$\varepsilon = \frac{1}{8} \Delta\omega C_0 Z_m \quad \text{Neper/Diode} \quad (20)$$

und nach Gl. (19) für einen solchen mit Längsdioden

$$\varepsilon = \frac{1}{8} \frac{\Delta\omega S_0}{\omega_m^2} Y_{0m} \quad \text{Neper/Diode}. \quad (21)$$

Im folgenden berechnen wir die maximale Effektivität für drei spezielle Bandpaßstrukturen.

4.1. Bandpaß nach Bild 5 für Wanderfeldverstärker mit Querdioden

Der Bandpaßvierpol nach Bild 5 verbindet benachbarte Kapazitätsdioden, deren Grundkapazität C_0 durch eine parallele Induktivität $L_2/2$ abgestimmt ist, durch eine Reiheninduktivität $2L_1$. Der Wellenwiderstand

$$Z = \frac{2\omega}{C_0 \sqrt{(\omega^2 - \omega_u^2)(\omega_{ob}^2 - \omega^2)}} \quad (22)$$

besitzt, wie in Bild 5 dargestellt, je einen Pol bei der unteren Grenzfrequenz

$$\omega_u = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} C_0 (L_2 || L_1)}} \quad (23)$$

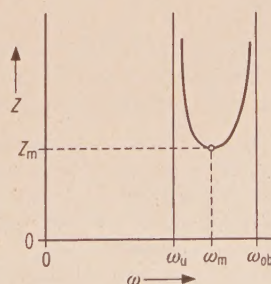
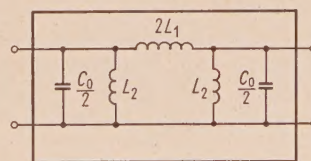


Bild 5. Bandpaßglied der Wellenleitung eines parametrischen Wanderfeldverstärkers mit Querdioden der Grundkapazität C_0 und grundsätzlicher Verlauf des Wellenwiderstands im Durchlaßbereich.

⁵Diese günstigsten Werte gelten für Kapazitätsdioden mit abruptem pn-Übergang.

und bei der oberen Grenzfrequenz

$$\omega_{ob} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} C_0 L_2}} \quad (24)$$

Der Wellenwiderstand durchläuft ein Minimum bei einer Frequenz, die das geometrische Mittel der beiden Grenzfrequenzen ist und die bei nicht zu großen Durchlaßbereichen mit dem arithmetischen Mittel der beiden Grenzfrequenzen hinreichend übereinstimmt. Diese Frequenz wählen wir als Mittenfrequenz der parametrischen Verstärkung. In ihrer Umgebung ist gute Anpassung möglich. Es gilt also

$$\omega_m = \sqrt{\omega_u \omega_{ob}} \quad (25)$$

Das Minimum des Wellenwiderstandes lautet

$$Z(\omega_m) = Z_m = \sqrt{\frac{2L_1}{C_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L_1}{L_2} - \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}} \quad (26)$$

und die Bandbreite

$$\Delta\omega = \omega_{ob} - \omega_u = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} C_0 L_1}} \left(\sqrt{1 + \frac{L_1}{L_2}} - \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \right) \quad (27)$$

Es ist also

$$\Delta\omega Z_m = \frac{2}{C_0} \quad (28)$$

und die maximale Effektivität beträgt nach Gl. (20)

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{4} \text{ Neper/Diode} = 2,17 \text{ dB/Diode} \quad (29)$$

Diese größtmögliche Effektivität ist also unabhängig von der Größe der Diode, d.h. von C_0 , und von der Mittenfrequenz ω_m . Der Grenzübergang zum Tiefpaß, $L_2 \rightarrow \infty$, ist jedoch nur sinnvoll, wenn man für die Mittenfrequenz ω_m das arithmetische Mittel der beiden Grenzfrequenzen wählt. Man erhält dann für den Tiefpaß eine etwas größere maximale Effektivität als nach Gl. (22). Dies ist jedoch für die Praxis bedeutungslos, da beim Übergang zum Tiefpaß die Voraussetzung, daß der Phasensynchronismus im ganzen Durchlaßbereich gegeben ist, immer weniger erfüllt ist.

4.2. Bandpaß nach Bild 6 für Wanderfeldverstärker mit Querdioden

Der Bandpaßvierpol nach Bild 6 verbindet benachbarte Kapazitätsdioden, deren Grundkapazität C_0 wieder durch eine parallelgeschaltete Indukti-

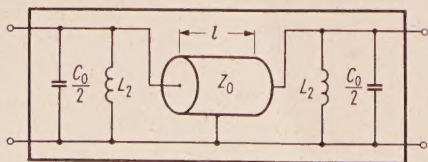


Bild 6. Bandpaßglied der Wellenleitung eines parametrischen Wanderfeldverstärkers mit Querdioden der Grundkapazität C_0 .

rität $L_2/2$ abgestimmt ist, durch ein homogenes Kabelstück (Wellenwiderstand Z_0 , Länge l), das wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit als Luftkabel betrachten können. Der Wellenwiderstand hat einen ähnlichen Verlauf wie in Bild 5 dargestellt. Die in der Mitte des Durchlaßbereiches liegende Mittenfrequenz der parametrischen Verstärkung kann man (im allgemeinen nur näherungsweise) mit der Resonanzfrequenz der Parallelschwingkreise zusammenfallen lassen, so daß der Wellenwiderstand Z_m bei der Frequenz ω_m mit Z_0 übereinstimmt. Die Grenzfrequenzen ω_u und ω_{ob} der Durchlaßbereiche, von denen hier nur der erste interessiert, ergeben sich aus den Gleichungen

$$\omega_m C_0 \frac{Z_0}{2} \left(\frac{\omega_u}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega_u} \right) = -\tan \frac{\omega_u l}{2c} \quad (30)$$

$$\omega_m C_0 \frac{Z_0}{2} \left(\frac{\omega_{ob}}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega_{ob}} \right) = \cot \frac{\omega_{ob} l}{2c}$$

Diese Gleichungen lassen sich näherungsweise leicht lösen, indem man die trigonometrischen Funktionen und die Ausdrücke für die Verstimmung der Parallelkreise jeweils durch die Tangente in der nächsten Nullstelle ersetzt. So erhält man für die Bandbreite näherungsweise den Ausdruck

$$\Delta\omega = \frac{c}{l} \frac{\pi}{1 + 2 \frac{c}{l} C_0 Z_0} \quad (31)$$

Damit und mit $Z_m = Z_0$ ergibt sich für die Effektivität nach Gl. (20)

$$\varepsilon = \frac{\pi}{16} \frac{2 \frac{c}{l} C_0 Z_0}{1 + 2 \frac{c}{l} C_0 Z_0} \text{ Neper/Diode} \quad (32)$$

Dieser Ausdruck ist bemerkenswerterweise wieder unabhängig von der Frequenz ω_m ; er verschwindet, wenn entweder $C_0 = 0$ oder wenn l hinreichend groß ist, was einleuchtend ist. Für Kapazitäten C_0 , die groß gegen die halbe Kapazität der Kabelstrecke sind,

$$C_0 \gg \frac{l}{2Z_0 c},$$

nimmt die Effektivität nach Gl. (32) einen Maximalwert an,

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\pi}{16} \text{ Neper/Diode} = 1,7 \text{ dB/Diode} \quad (33)$$

Dieser Wert ist etwas kleiner als der in Gl. (29) gefundene Wert.

Für den Grenzübergang zum Tiefpaß, d.h. für $L_2 \rightarrow \infty$, gilt eine ähnliche Überlegung wie im Abschnitt 4.1.

4.3. Bandpaß nach Bild 7 für Wanderfeldverstärker mit Längsdioden

Der Bandpaßvierpol nach Bild 7 verbindet benachbarte Kapazitätsdioden durch eine induktive Sternschaltung, die auch die Ersatzschaltung einer induktiven Ankopplung sein kann. In Bild 7 ist S_0

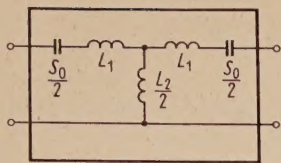


Bild 7. Bandpaßglied der Wellenleitung eines parametrischen Wanderfeldverstärkers mit Längsdioden der Grundelastanz S_0 .

die Grundelastanz einer Diode. Der Wellenleitwert Y_0 dieses Vierpols,

$$Y_0 = \frac{2\omega}{S_0 \sqrt{\left[\left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)^2 - 1\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{ob}}\right)^2\right]}}, \quad (34)$$

verhält sich ganz ähnlich wie der Wellenwiderstand des Vierpols von Bild 5. Er durchläuft ein Minimum

$$Y_{0m} = \sqrt{\frac{2}{S_0 L_1}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L_2}{L_1} - 1}} \quad (35)$$

bei der Frequenz, die das geometrische Mittel aus den beiden Grenzfrequenzen

$$\omega_u = \sqrt{\frac{S_0}{2L_1}} \quad (36)$$

und

$$\omega_{ob} = \sqrt{\frac{S_0}{2C_0(L_1 + L_2)}} \quad (37)$$

ist.

Das geometrische Mittel der beiden Grenzfrequenzen wählen wir wieder als Bandmittenfrequenz ω_m der parametrischen Verstärkung, wobei wir voraussetzen, daß es nur wenig vom arithmetischen Mittel abweicht,

$$\omega_m = \sqrt{\omega_u \omega_{ob}} = \sqrt{\frac{S_0}{2L_1}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L_2}{L_1}}}. \quad (38)$$

Die Bandbreite ist dann

$$\Delta\omega = \omega_{ob} - \omega_u = \frac{\sqrt{1 + \frac{L_2}{L_1} - 1}}{\sqrt{2C_0(L_1 + L_2)}}. \quad (39)$$

Aus den Gl. (35), (38) und (39) folgt

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_m^2} Y_{0m} = \frac{2}{S_0}, \quad (40)$$

so daß nach Gl. (21) für die maximale Effektivität

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{4} \text{ Neper/Diode} = 2,17 \text{ dB/Diode} \quad (41)$$

folgt. Wir erhalten also das gleiche Ergebnis wie in Gl. (29).

5. Fremde und eigene experimentelle Ergebnisse

Die uns bisher bekannt gewordenen Ausführungen von parametrischen Wanderfeldverstärkern mit Kapazitätsdioden haben ihren Verstärkungsbereich in der Umgebung der halben Pumpfrequenz und lassen sich hinsichtlich des Aufbaues ihrer Wellenleitung durch eine Kettenschaltung einer der behandelten Bandpaßvierpole (die im Grenzfall zum Teil auch Tiefpaßvierpole sind) darstellen. Für sie gilt also die hier durchgeführte Abschätzung, daß die Bandmittenverstärkung je Diode multipliziert mit der relativen totalen Bandbreite (das ist die Bandbreite, in der überhaupt Verstärkung auftritt), nicht größer als etwa 2 dB je Diodenstufe sein kann.

Um die experimentellen Ergebnisse beurteilen zu können, haben wir aus diesen die mittlere Verstärkung je Diode und ihre relative totale Bandbreite ermittelt, daraus die Effektivität berechnet und die Daten in einer Tabelle zusammengestellt.

Der Höchstwert der erreichten Effektivität liegt bei 1,4 dB je Diodenstufe. Beim Vergleich der einzelnen Verstärker ist zu beachten, daß der Aussteuergrad der Dioden im allgemeinen nicht bekannt

	Dioden- stufen	Bandmitten- frequenz f_m	mittlere Verstärkung a_m je Stufe bei f_m	rel. totale Bandbreite δ	Effektivität $\varepsilon = a_m \delta$
		MHz	dB	%	dB/Stufe
ENGELBRECHT [7]	4	445	2,0	67	1,35
LOMBARDO u. a. [8]	12	3,05	0,7	103	0,72
HONEY u. a. [9]	8	750	1,6	48	0,78
BOBISCH u. a. [10]	2	2920	2,5	20	0,50
			6,5	13	0,84
HASHIMOTO u. a. [11]	4	6000	2,5	4,2*	0,11
CURRIE u. a. [12]	4	3050	3,75	12,1	0,44
HEINLEIN	5	11,3	1,5	60	0,90
	2	400	3,5	25	0,87
SØRENSEN [13]	6	115	2,1**	20	0,42

* 3-dB-Bandbreite.

** Bruttoverstärkung (Verhältnis der Ausgangsspannungen mit und ohne Pumpaussteuerung der Dioden).

ist und vom angenommenen Wert $1/2$ mehr oder weniger, auch nach größeren Werten hin, abweichen kann. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß in dem Fall, der unserer Abschätzung zugrunde liegt, die Pumpschwingungen zweier aufeinanderfolgender Dioden eine Phasenverschiebung von etwa 180° haben, da wir die halbe Pumpfrequenz in die Mitte der Bandpaßdurchlaßbereiche gelegt haben, wo der Signalphasenwinkel etwa 90° beträgt. Dies bedeutet, daß der Verstärker reziprok ist. Soll der Verstärker nicht reziprok arbeiten — der bestmögliche Fall setzt eine Pumpphasenverschiebung von 90° oder 270° voraus, — dann muß man eine geringere Bandbreite in Kauf nehmen.

Größere Werte der Effektivität lassen sich mit nicht entarteten parametrischen Wanderfeldverstärkern erreichen, bei denen die Pumpfrequenz erheblich größer ist als der doppelten Signalmittelfrequenz entspricht [14], [15]. Doch ist es in der Praxis schwierig, den erforderlichen Phasensynchronismus einzuhalten.

Anhang

Die Erregung parametrischer Wellen steht in Analogie zur Erregung parametrischer Schwingungen. Werden gemäß Bild 8 zwei Schwingungskreise gleicher Bandbreite B durch eine Wechselkapazität gekoppelt und zu Schwingungen angelegt, so erfüllen die Schwingfrequenzen automatisch

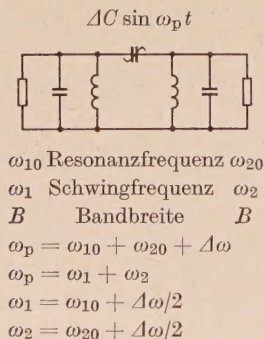


Bild 8. Erregung parametrischer Schwingungen ω_1 und ω_2 .

die Frequenzbedingung $\omega_p = \omega_1 + \omega_2$, auch wenn die Summe der Resonanzfrequenzen der Einzelkreise um $\Delta\omega$ von der Pumpfrequenz abweicht. Die Schwingfrequenzen unterscheiden sich dann um je $\Delta\omega/2$ von der Resonanzfrequenz der Einzelkreise. Im Fall $\Delta\omega \neq 0$ erzeugt die gesteuerte Kapazität automatisch solche Blindkomponenten, daß die FehlAbstimmung $\Delta\omega$ kompensiert wird; allerdings geht dies auf Kosten der entdämpfenden negativen Wirkkomponente. Die zum Schwingungseinsatz erforderliche Kapazitätsamplitude vergrößert sich dadurch um den Faktor

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi B}\right)^2}.$$

Schrifttum

- [1] CULLEN, A. L., A travelling-wave parametric amplifier. *Nature* **181** [1958], 332.
- [2] TIEN, P. K. und SUHL, H., A traveling-wave ferromagnetic amplifier. *Proc. Inst. Radio Engrs.* **46** [1958], 700–706.
- [3] BELL, C. V. und WADE, G., Iterative traveling-wave parametric amplifiers. *Transact. Inst. Radio Engrs.* CT-7 [1960], 4–11.
- [4] TIEN, P. K., Parametric amplification and frequency mixing in propagating circuits. *J. appl. Phys.* **29** [1960], 1347–1357.
- [5] HEILMEIER, G. H., An analysis of parametric amplification in periodically loaded transmission lines. *RCA Rev.* **20** [1959], 442–454.
- [6] HEFFNER, H. und WADE, G., Gain, bandwidth and noise characteristics of the variable parameter amplifier. *J. appl. Phys.* **29** [1959], 1321–1331.
- [7] ENGELBRECHT, R. S., Nonlinear-reactance (parametric) traveling-wave amplifier for uhf. *Digest of Technical Papers, Solid State Circuit Conference, Philadelphia 1959*, S. 8–9.
- [8] LOMBARDO, P. P. und SARD, E. W., Low-frequency prototype traveling-wave reactance amplifier. *Proc. Inst. Radio Engrs.* **49** [1959], 995–996.
- [9] HONEY, R. C. und JONES, E. M. T., A wideband uhf traveling-wave variable reactance amplifier. *Transact. Inst. Radio Engrs.* MTT-8 [1960], 351–361.
- [10] BOBISCH, P. und SONDHHAUS, C., Reaktanzdioden und ihr Einsatz in breitbandigen Hohlleiterverstärkern. *Nachrichtentech. Fachber.* **22** [1961], 338–340; auch *Telefunken-Röhre H.* 38 [1961], 115–124.
- [11] HASHIMOTO, T., HAMADA, S. und ISHII, Y., The experiments on the 6000 mc traveling-wave parametric amplifier. *Nachrichtentech. Fachber.* **22** [1961], 341.
- [12] CURRIE, M. R. und GOULD, R. W., Coupled-cavity traveling-wave parametric amplifiers: Part I—Analysis. GRABOWSKY, K. P. und WEGLEIN, R. D., —: Part II — Experiments. *Proc. Inst. Radio Engrs.* **48** [1960], 1959–1987.
- [13] SØRENSEN, E. V., Proposal for a gain-equalizing technique for travelling-wave parametric amplifiers. AGARD Conference on Low Noise Electronics, Oslo 1961.
- [14] HENOC, B. T., Aspects on wide-band parametric travelling-wave amplifiers. *Ericsson Tech.* **16** [1960], 77–135.
- [15] BOYET, H. und FLERI, D., A method for broad-banding synchronism in traveling-wave parametric devices. *Proc. Inst. Radio Engrs.* **48** [1960], 1331–1333.

Reiterative Wave Beams of Rectangular Symmetry

by FELIX SCHWERING

U.S. Army Signal Research and Development Laboratory, Fort Monmouth, N.J., U.S.A.

(A.E.U. 15 [1961], 555–564; received July 18th, 1961)

DK 621.372

Reiterative wave beams are wave beams whose cross-sectional field distribution is repeated at periodic intervals by passing the wave beams through a structure of equally spaced phase-correcting devices that re-establish the cross-sectional phase distribution. If the beams are composed of elementary plane waves whose directions of propagation form only a small solid angle around the beam axis, we can derive a system of wave beams that are reiterated by the same phase-correcting structure. These wave beams are called "beam modes", since they satisfy orthogonality relations similar to the modes in a waveguide. The beam modes are assumed to be of rectangular symmetry; beam modes of cylindrical symmetry have been treated in a previous paper. If we assume infinitely extended phase-correcting devices, the field distribution of the beam modes is determined by Hermite polynomials in the case of rectangular symmetry and by Laguerre polynomials in the case of cylindrical symmetry. If the phase-correcting devices limit the beam cross-section, the mode functions are modified and, in addition, there is an iteration loss.

Iterierbare Wellenbündel (reiterative wave beams) sind Wellenbündel, deren Querschnitts-Feldverteilung in der Richtung der Bündelachse periodisch wiederholt werden kann, indem man das Bündel durch in regelmäßigen Abständen angeordnete phasenkorrigierende Elemente passieren läßt, die die Querschnitts-Phasenverteilung auf die ursprüngliche Verteilung zurücktransformieren. Unter der Voraussetzung, daß die Wellenbündel lediglich (ebene) Elementarwellen umfassen, deren Ausbreitungsrichtungen innerhalb eines kleinen räumlichen Winkels liegen, kann ein System von Wellenbündeln angegeben werden, die durch ein und dieselbe phasenkorrigierende Anordnung iteriert werden. Die Wellenbündel dieses Systems werden als „beam modes“ bezeichnet, da sie Orthogonalitätsbeziehungen genügen, ähnlich denen der Modelfunktionen eines Hohlleiters. In der vorliegenden Arbeit wird angenommen, daß die beam modes rechtwinklige Symmetrie aufweisen; beam modes von zylindrischer Symmetrie sind in einer früheren Arbeit behandelt worden. Unter der idealisierten Annahme unendlich ausgedehnter phasenkorrigierender Elemente ist die Feldverteilung der beam modes im Fall rechtwinkliger Symmetrie durch Hermite'sche Polynome und im Fall zylindrischer Symmetrie durch Laguerresche Polynome bestimmt. Wenn die phasenkorrigierenden Elemente den Querschnitt der Wellenbündel begrenzen, werden die Modelfunktionen abgewandelt. Außerdem ist die Iterierung mit einem Beugungsverlust verbunden.

1. Introduction

Reiterative wave beams are wave beams whose cross-sectional field distribution is periodically repeated in the direction of propagation by re-establishing the cross-sectional phase distribution of the wave beam in equally spaced planes perpendicular to the beam axis. Practically, this can be achieved by passing the wave beam through a sequence of phase-correcting devices (phase transformers) that periodically effect appropriate phase transformations within the wave beam (Fig. 1). Such phase transformations can be performed theoretically without simultaneous partial reflections. Accordingly ideal phase transformers are assumed in the following causing neither reflection nor absorption losses.

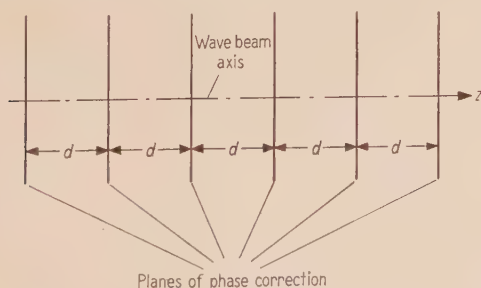


Fig. 1. The wave beam guiding structure.

If the beams are composed of elementary plane waves whose directions of propagation lie within a small solid angle around the beam axis, we can derive a system of reiterative wave beams that require the same phase-correcting structure. These wave beams satisfy orthogonality relations similar to the modes in a waveguide and, therefore, have been termed "beam modes".

The beam modes considered in this paper are of rectangular symmetry. The case of cylindrical symmetry has been discussed in a previous paper [1].

We distinguish between the idealized case, where the required phase transformation is performed over the entire planes of phase correction (infinite phase transformers), and the more realistic case, where the phase correction is achieved over a finite area only (finite phase transformers). In the ideal case the beam modes are transmitted without loss of energy. Since there are no cross-sectional limitations prescribing a certain symmetry, beam modes of rectangular and cylindrical symmetry are equally possible. However, in general, they require different phase corrections. In the actual case, the beam modes will be attenuated since a fraction of the transmitted energy will be radiated into space. The symmetry of the beam modes is determined by the shape of the phase transformers. Rectangular phase transformers lead to beam modes of rectangular sym-

metry, the subject of this paper. Circular phase transformers lead to beam modes of cylindrical symmetry, treated in the previous paper.

2. The Wave Beam Approximation of the General Solution of Maxwell's Equations

The general solution of Maxwell's equations in a homogenous half-space free of sources can be obtained by a superposition of propagating as well as evanescent elementary plane waves. Describing the source-free half space by cartesian coordinates x , y and $z > z_1$, where $z = z_1$ is the boundary plane, we write the general solution as follows:

$$\begin{aligned} E_x &= \iint_{u,v=-\infty}^{\infty} [h u f(u, v) + k v g(u, v)] e^{j(u x + v y - h z)} du dv, \\ E_y &= \iint_{u,v=-\infty}^{\infty} [h v f(u, v) - k u g(u, v)] e^{j(u x + v y - h z)} du dv, \\ E_z &= \iint_{u,v=-\infty}^{\infty} (u^2 + v^2) f(u, v) e^{j(u x + v y - h z)} du dv, \\ H_x &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \iint_{u,v=-\infty}^{\infty} [h u g(u, v) - k v f(u, v)] \cdot e^{j(u x + v y - h z)} du dv, \\ H_y &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \iint_{u,v=-\infty}^{\infty} [h v g(u, v) + k u f(u, v)] \cdot e^{j(u x + v y - h z)} du dv, \\ H_z &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \iint_{u,v=-\infty}^{\infty} (u^2 + v^2) g(u, v) e^{j(u x + v y - h z)} du dv \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{with } h = \begin{cases} +(k^2 - u^2 - v^2)^{1/2} & \text{for } u^2 + v^2 \leq k^2 \\ -j(u^2 + v^2 - k^2)^{1/2} & \text{for } u^2 + v^2 \geq k^2. \end{cases}$$

The functions $f(u, v)$ and $g(u, v)$ represent the amplitude spectrum of the elementary waves. They are arbitrary functions of the parameters u and v , restricted only by the condition that the integrands on the right-hand side of equations (1), as well as their first and second derivatives with respect to x , y , and z , must be integrable for any x , y , and $z > z_1$. The amplitude function $f(u, v)$ determines waves of the E -type; the amplitude function $g(u, v)$ determines waves of the H -type.

The term h is defined by $k^2 = u^2 + v^2 + h^2$, where k is the plane wave propagation constant of the half space $z > z_1$. Within the range $u^2 + v^2 \leq k^2$, h is real; accordingly, the elementary waves are propagating waves. In the range $u^2 + v^2 \geq k^2$, h is imaginary; the elementary waves are evanescent waves. The signs of h in both ranges imply the time factor $e^{j\omega t}$.

In the following discussion we restrict our considerations to wave beams that are composed essentially of propagating elementary waves whose directions of propagation lie within a small solid angle around the z -axis. These beams are obviously characterized by amplitude functions $f(u, v)$ and

$g(u, v)$, which have considerable values only in the neighborhood of $u = v = 0$; say for $|u|, |v| \leq u_1, v_1$ where the (positive) constants u_1, v_1 are small compared to k . Since in this range h is close to k , we can write in the amplitude terms of equations (1) $h \approx k$. In the phase terms we replace h by a two-term approximation $h \approx k - \frac{u^2 + v^2}{2k}$, which is permissible in a restricted z -range determined by

$$\frac{u_1^2 + v_1^2}{2k} |z| < 2\pi. \quad (2)$$

Hence equations (1) simplify to

$$\begin{aligned} E_x &= +k e^{-jkz} \iint_{u,v} f^{(1)}(u, v) e^{j(u x + v y)} e^{j \frac{u^2 + v^2}{2k} z} du dv, \\ E_y &= +k e^{-jkz} \iint_{u,v} f^{(2)}(u, v) e^{j(u x + v y)} e^{j \frac{u^2 + v^2}{2k} z} du dv, \\ E_z &= +e^{-jkz} \iint_{u,v} [u f^{(1)}(u, v) + v f^{(2)}(u, v)] \cdot e^{j(u x + v y)} e^{j \frac{u^2 + v^2}{2k} z} du dv, \\ H_x &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} k e^{-jkz} \iint_{u,v} f^{(2)}(u, v) e^{j(u x + v y)} \cdot e^{j \frac{u^2 + v^2}{2k} z} du dv, \\ H_y &= +\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} k e^{-jkz} \iint_{u,v} f^{(1)}(u, v) e^{j(u x + v y)} \cdot e^{j \frac{u^2 - v^2}{2k} z} du dv, \\ H_z &= +\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e^{-jkz} \iint_{u,v} [v f^{(1)}(u, v) - u f^{(2)}(u, v)] \cdot e^{j(u x + v y)} e^{j \frac{u^2 + v^2}{2k} z} du dv. \end{aligned} \quad (3)$$

In these equations the following substitutions have been made:

$$\begin{aligned} u f(u, v) + v g(u, v) &= f^{(1)}(u, v), \\ v f(u, v) - u g(u, v) &= f^{(2)}(u, v). \end{aligned} \quad (4)$$

The integration over u, v should actually be limited to the range $|u|, |v| \leq u_1, v_1$. However, if $f(u, v)$ and $g(u, v)$ tend rapidly to zero outside this range, the integration may as well be carried out over the entire u, v plane. This operation simplifies considerably the subsequent mathematical evaluations.

Any wave beam described by equations (3) can be separated into two linearly polarized partial fields. One partial field, determined by the amplitude function $f^{(1)}(u, v)$ has only the transverse components E_x and H_y :

$$E_x = E^{(1)} e^{-jkz}, \quad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^{(1)} e^{-jkz}, \quad (5a)$$

$$E^{(1)} = k \iint_{u,v} f^{(1)}(u, v) e^{j(u x + v y)} e^{j \frac{u^2 + v^2}{2k} z} du dv.$$

The other one, determined by the amplitude function $f^{(2)}(u, v)$ has only the transverse components E_y and H_x :

$$E_y = E^{(2)} e^{-jkz}, \quad H_x = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^{(2)} e^{-jkz}, \quad (5b)$$

$$E^{(2)} = k \iint_{u,v} f^{(2)}(u, v) e^{j(u x + v y)} e^{j \frac{u^2 + v^2}{2k} z} du dv.$$

Since electromagnetic fields are characterized completely by their transverse components, we disregard the z components in the following discussion.

3. Reiterative Wave Beams Guided

by Infinitely-Extended Phase Transformers

Wave beams as described by equations (5) can be reiterated by a structure of equally spaced, identical phase transformers (Fig. 1), if e.g. $f^{(1)}(u, v)$ and $f^{(2)}(u, v)$ are even real or odd imaginary functions. In this case the field distribution within any plane $z = +z_0$ is conjugate complex to the field distribution in the corresponding plane $z = -z_0$. Hence, if an appropriate phase transformation is performed at the plane $z = +z_0$, the field distribution of the plane $z = -z_0$ is iterated within the plane $z = +z_0$ and, consequently, the field in the

space range $-z_0 \leq z \leq +z_0$ is repeated within the range $+z_0 \leq z \leq +3z_0$. If identical phase corrections are performed in subsequent planes $z = 3z_0, 5z_0, \dots$, the original field distribution of the plane $z = -z_0$ is reiterated at intervals of $2z_0$ and so is the field in between the phase-correcting planes. Consequently, a structure of uniform phase transformers effecting appropriate phase transformations at the planes $z = z_0(2i + 1)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) acts as a guide for the reiterative wave beams.

The application of the simplified equations (5) implies that z_0 is restricted by condition (2):

$$\frac{u_1^2 + v_1^2}{2k} z_0 < 2\pi.$$

This condition can be satisfied for any value of z_0 , provided that u_1, v_1 are chosen sufficiently small.

The phase correction required in the planes $z = z_0(2i + 1)$ obviously depends on the functions $f^{(1,2)}(u, v)$, i.e., the phase correction is different for different wave beams. However, a complete orthogonal system of reiterative wave beams exists, every one of which requires the same phase correction:

$$\Delta\psi(x, y) = -\psi_0 + \psi_x x^2 + \psi_y y^2,$$

where ψ_0, ψ_x, ψ_y are constants¹. This system is obtained by representing $f^{(1,2)}(u, v)$ in the following series of Hermite polynomials [2]:

$$f^{(1,2)}(u, v) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \alpha_{n,m}^{(1,2)} f_{n,m}(u, v) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \alpha_{n,m} (-j)^{n+m} H e_n \left(\frac{u}{u_0} \right) H e_m \left(\frac{v}{v_0} \right) e^{-\frac{1}{4} \left[\left(\frac{u}{u_0} \right)^2 + \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 \right]}. \quad (6)$$

The quantities u_0, v_0 are constants which we shall later dispose of. The Hermite polynomials

$$(n! \sqrt{2\pi})^{-1/2} H e_n(w) = (n! \sqrt{2\pi})^{-1/2} (-1)^n e^{w^2/2} \frac{d^n}{dw^n} (e^{-w^2/2})$$

are even functions for even n and odd functions for odd n . They form in the range $-\infty \leq w \leq +\infty$ a complete system of ortho-normal functions; the weight function is $e^{-w^2/2}$. Consequently, every given amplitude function can be represented by a series (6).

The integrals obtained by inserting equation (6) into equations (5) can be evaluated, yielding the result [3]:

$$\begin{aligned} E^{(1,2)} &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \alpha_{n,m}^{(1,2)} E_{n,m} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \alpha_{n,m}^{(1,2)} 4\pi u_0 v_0 \left\{ \left[1 + \left(2u_0^2 \frac{z}{k} \right)^2 \right] \left[1 + \left(2v_0^2 \frac{z}{k} \right)^2 \right] \right\}^{-1/4} \\ &\cdot H e_n \left\{ \frac{2u_0 x}{\left[1 + \left(2u_0^2 \frac{z}{k} \right)^2 \right]^{1/2}} \right\} \cdot H e_m \left\{ \frac{2v_0 y}{\left[1 + \left(2v_0^2 \frac{z}{k} \right)^2 \right]^{1/2}} \right\} \exp \left\{ -\frac{u_0^2 x^2}{1 + \left(2u_0^2 \frac{z}{k} \right)^2} - \frac{v_0^2 y^2}{1 + \left(2v_0^2 \frac{z}{k} \right)^2} \right\} \\ &\cdot \exp \left\{ -j \left[\frac{2u_0^4 \frac{z}{k} x^2}{1 + \left(2u_0^2 \frac{z}{k} \right)^2} + \frac{2v_0^4 \frac{z}{k} y^2}{1 + \left(2v_0^2 \frac{z}{k} \right)^2} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \arctan \left(2u_0^2 \frac{z}{k} \right) - \left(m + \frac{1}{2} \right) \arctan \left(2v_0^2 \frac{z}{k} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Thus the total field can be regarded as a superposition of partial fields:

$$E_{n,m}^{(1)} = E_{n,m} e^{-jkz} \mathbf{e}_x, \quad H_{n,m}^{(1)} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{n,m} e^{-jkz} \mathbf{e}_y, \quad (8a)$$

$$E_{n,m}^{(2)} = E_{n,m} e^{-jkz} \mathbf{e}_y, \quad H_{n,m}^{(2)} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{n,m} e^{-jkz} \mathbf{e}_x, \quad (8b)$$

¹ The phase corrections required for beam modes of rectangular and cylindrical symmetry, respectively, differ insofar as in the former case ψ_x and ψ_y are in general different, while in the latter case ψ_x and ψ_y must be equal.

$$E_{n,m} = 4\pi u_0 v_0 [(1+z_u^2)(1+z_v^2)]^{-1/4} H e_n \left\{ \frac{x'}{(1+z_u^2)^{1/2}} \right\} \cdot H e_m \left\{ \frac{y'}{(1+z_v^2)^{1/2}} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left(\frac{x'^2}{1+z_u^2} + \frac{y'^2}{1+z_v^2} \right) \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{j}{4} \left(\frac{z_u x'^2}{1+z_u^2} + \frac{z_v y'^2}{1+z_v^2} \right) + j \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \arctan z_u + \left(m + \frac{1}{2} \right) \arctan z_v \right] \right\} \quad (8c)$$

with $x' = 2u_0 x, \quad y' = 2v_0 y, \quad z_u = 2u_0^2 \frac{z}{k}, \quad z_v = 2v_0^2 \frac{z}{k}.$

The terms e_x, e_y denote the unit vectors of the x - and y -direction respectively. For reasons which will become obvious, these partial fields shall be called beam modes. Since the corresponding amplitude functions $f_{n,m}(u, v)$ according to equation (6) are even real or odd imaginary functions, the field distribution of the beam modes becomes conjugate complex in corresponding planes $z = -z_0$ and $z = +z_0$. The phase difference between these planes is, with equations (8):

$$\Delta\Phi_{n,m} = \Delta\varphi_{n,m} + \Delta\chi(x, y) = [-2kz_0 + (2n+1)\arctan z'_u + (2m+1)\arctan z'_v] + \left(-\frac{1}{2} \frac{z'_u x'^2}{1+z_u'^2} - \frac{1}{2} \frac{z'_v y'^2}{1+z_v'^2} \right) \quad (9)$$

with $z'_u = 2u_0^2 \frac{z_0}{k}, \quad z'_v = 2v_0^2 \frac{z_0}{k},$

where the first term $\Delta\varphi_{n,m}$ is independent of the cross-sectional coordinates x, y . The second term $\Delta\chi(x, y)$, which depends on x and y , is independent of n, m , and is, therefore, the same for all beam modes (8). Hence, if the phase transformers placed at $z = z_0(2i+1)$ yield identical phase corrections,

$$\Delta\psi = -\psi_0 - \Delta\chi(x, y) = -\psi_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{z'_u x'^2}{1+z_u'^2} + \frac{z'_v y'^2}{1+z_v'^2} \right), \quad (10)$$

the field distribution of any beam mode at the plane $z = -z_0$ is periodically repeated at the planes $z = z_0(2i+1)$, and consequently the beam modes are reiterated by the structure.

With every iteration the beam modes are multiplied by a constant complex factor of the absolute value 1, $b_{n,m} = \exp \{j(\Delta\varphi_{n,m} - \psi_0)\} = \exp \{-j2kz_0 + j(2n+1)\arctan z'_u + j(2m+1)\arctan z'_v - j\psi_0\},$ (11) which depends on the order n, m of the beam modes but does not change the cross-sectional field distribution.

The beam modes (8), similar to the modes in a wave guide, satisfy the orthogonality relations:

$$\varepsilon \iint_{x,y=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{n,n}^{(1,2)} \cdot \mathbf{E}_{n',m'}^{(1,2)*} dx dy = \mu \iint_{x,y=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{n,n}^{(1,2)} \cdot \mathbf{H}_{n',m'}^{(1,2)*} dx dy = \delta_{nn'} \delta_{mm'} A, \quad (12a)$$

$$\varepsilon \iint_{x,y=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{n,n}^{(1,2)} \cdot \mathbf{E}_{n',m'}^{(2,1)*} dx dy = \mu \iint_{x,y=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{n,n}^{(1,2)} \cdot \mathbf{H}_{n',m'}^{(2,1)*} dx dy = 0, \quad (12b)$$

$$\iint_{x,y=-\infty}^{\infty} [\mathbf{E}_{n,n}^{(1,2)} \times \mathbf{H}_{n',m'}^{(1,2)*}] \mathbf{e}_z dx dy = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \frac{A}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (12c)$$

$$\iint_{x,y=-\infty}^{\infty} [\mathbf{E}_{n,n}^{(1,2)} \times \mathbf{H}_{n',m'}^{(2,1)*}] \mathbf{e}_z dx dy = 0 \quad (12d)$$

with

$$\delta_{nn'} = \begin{cases} 1 & \text{for } n = n' \\ 0 & \text{for } n \neq n' \end{cases}, \quad A = 8\pi^3 u_0 v_0 n! m! \varepsilon,$$

where the integration is performed over any plane $z = \text{const}$, $\mathbf{E}_{n,n}^{(1)*} \dots \mathbf{H}_{n,m}^{(2)*}$ denote conjugate complex field vectors, and \mathbf{e}_z is the unit vector of the z -direction. Equations (12a) and (12c) are easily proved by use of the orthogonality relation of the Hermite polynomials. Equations (12b) and (12d) are self-evident because of the directions of the field vectors.

The electric-field vectors of the beam modes form a complete system of vector functions for any plane $z = \text{const}$ (and so do the magnetic-field vectors since they are proportional to the electric-field vectors). Consequently, every field whose transverse

electric (or magnetic) field strength is known in a plane $z = \text{const}$ can be expanded into a series of beam modes, with one restriction: the beam-mode representation will be an approximation of the exact field only, if this field satisfies the conditions leading to equations (3).

Although the field distribution of every single beam mode is periodically repeated at intervals of $2z_0$, this is not the case for a field composed of a number of beam modes. For the set of coefficients $\alpha_{n,m}^{(1,2)}$ characterizing a field \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = \sum_{n,m} \alpha_{n,m}^{(1)} \mathbf{E}_{n,m}^{(1)} + \sum_{n,m} \alpha_{n,m}^{(2)} \mathbf{E}_{n,m}^{(2)}, \quad (13)$$

$$\alpha_{n,m}^{(1,2)} = \frac{1}{8\pi^3 u_0 v_0 n! m!} \iint_{x,y=-\infty}^{\infty} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{n,m}^{(1,2)*} dx dy$$

changes every time the field passes through a phase transformer, since the coefficients $\alpha_{n,m}^{(1,2)}$ are multiplied by the factors $b_{n,m}$ given in equation (11), which depend on the parameters n and m . The $b_{n,m}$ have absolute values of 1. Hence, there is no attenuation, and the field is still guided by the phase transformers, although the cross-sectional distribution is no longer repeated with the period $2z_0$.

Since the beam modes have been derived from the simplified equations (5), they are approximate solutions of Maxwell's equations only if they satisfy the conditions that the corresponding amplitude functions

$$f_{n,m}(u, v) = (-j)^{n+m} H e_n \left(\frac{u}{u_0} \right) H e_m \left(\frac{v}{v_0} \right) e^{-\frac{1}{4} \left[\left(\frac{u}{u_0} \right)^2 + \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 \right]}$$

have noticeable values merely for $u, v \ll k$. For a beam mode of a given order n, m this requirement can always be fulfilled (because of the exponential factor) if we choose sufficiently small values of u_0 and v_0 . Then, all beam modes whose order is smaller than the given order n, m will satisfy the condition even better, because $H e_n$ and $H e_m$ are polynomials of the n th and m th degree, respectively. However, for the beam modes of considerably higher order than n, m , the condition will increasingly be violated.

While only a finite number of beam modes will satisfy approximately the exact equations (1), all beam modes satisfy exactly the approximated equations (5). Hence, the beam-mode expansion of a field whose transverse components are given in a plane $z = \text{const}$ continues the field beyond this plane (in which the field is represented exactly) according to these approximated equations. Obviously, the actual field is continued according to the exact equations (1). The beam-mode series will, therefore, approximate the exact field only if this field satisfies the condition that permits the transformation of the exact equations (1) into the approximated equations (5); that is, the corresponding amplitude function must be restricted essentially to a small range near the point $u = v = 0$.

Then, although the beam-mode series will in general comprise all beam modes, the coefficients $\alpha_{n,m}$ of the higher beam modes that are no longer approximate solutions of Maxwell's equations will be negligible if u_0, v_0 are chosen sufficiently small.

The beam modes are according to equations (12c) and (12d) orthogonal to one another with regard to the total power. Hence, we obtain for the total power transmitted by a field (13)

$$P = \sum_{n,m} |\alpha_{n,m}^{(1)}|^2 P_{n,m}^{(1)} + \sum_{n,m} |\alpha_{n,m}^{(2)}|^2 P_{n,m}^{(2)}, \quad (14)$$

where $P_{n,m}^{(1,2)}$ denotes the power transmitted by a single beam mode n, m :

$$P_{n,m}^{(1,2)} = \frac{1}{2} \iint_{x,y=-\infty}^{\infty} [\mathbf{E}_{n,m}^{(1,2)} \times \mathbf{H}_{n,m}^{(1,2)*}] \cdot \mathbf{e}_z dx dy = 4\pi^3 u_0 v_0 n! m! \sqrt{\epsilon/\mu}. \quad (15)$$

The fraction of the power $P_{n,m}^{(1,2)}$, which in a plane $z = \text{const}$ is transmitted through a strip $-x_0 \leq x \leq +x_0$ or $-y_0 \leq y \leq +y_0$, is with equation (8) given by

$$\eta_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n!} \int_0^{x_0} [H e_n(\tilde{x})]^2 e^{-\tilde{x}^2/2} d\tilde{x} \quad (16)$$

$$\text{and } \eta_m = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{m!} \int_0^{\tilde{y}_0} [H e_m(\tilde{y})]^2 e^{-\tilde{y}^2/2} d\tilde{y}$$

respectively, where

$$(16a)$$

$$\tilde{x}_0 = \frac{2u_0 x_0}{\left[1 + \left(2u_0^2 \frac{z}{k}\right)^2\right]^{1/2}}, \quad \tilde{y}_0 = \frac{2v_0 y_0}{\left[1 + \left(2v_0^2 \frac{z}{k}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

Beam modes of different superscripts (1) and (2) yield identical values for η_n, η_m . We readily see that the relative power transmitted through a rectangle $-x_0 \leq x \leq +x_0, -y_0 \leq y \leq +y_0$, formed by the common area of the two strips is equal to the product $\eta_n \cdot \eta_m$.

Obviously η_n depends on x_0 and z , η_m on y_0 and z . Requiring $\eta_n(x_0, z) = \text{const}$ and $\eta_m(y_0, z) = \text{const}$, we therefore obtain surfaces $x_0 = x_0(z)$ and $y_0 = y_0(z)$ that can be interpreted as envelopes of constant energy flux. The terms η_n and η_m are constant, if the upper limits \tilde{x}_0 and \tilde{y}_0 of the integrals (16) are unchanged. Hence, we obtain

$$x_0^2 = \left(\frac{\tilde{x}_0}{2u_0}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{2u_0^2}{k}\right)^2 z^2\right], \quad (17)$$

$$y_0^2 = \left(\frac{\tilde{y}_0}{2v_0}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{2v_0^2}{k}\right)^2 z^2\right].$$

If u_0, v_0 are given, $x_0 = x_0(z; \tilde{x}_0)$ and $y_0 = y_0(z; \tilde{y}_0)$ represent two sets of similar surfaces (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0 are considered as parameters) characterizing the envelopes of constant energy flux. These sets are independent of n and m , i.e. they are the same for every beam mode. Merely the values of the parameters $\eta_n = \eta_n(\tilde{x}_0)$ and $\eta_m = \eta_m(\tilde{y}_0)$, respectively, attached to any surface, vary from beam mode to beam mode. Equations (17) can be written in the normalized form

$$\left(\frac{\zeta}{\zeta_0}\right)^2 = \frac{1}{w_0} + w_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \quad (18)$$

where $\zeta = x_0, y_0$; $\zeta_0 = \sqrt{\frac{z_0}{2k}} \tilde{x}_0, \sqrt{\frac{z_0}{2k}} \tilde{y}_0$;

$$w_0 = 2u_0^2 \frac{z_0}{k}, \quad 2v_0^2 \frac{z_0}{k}.$$

The term z_0 denotes, as before, the location of the phase transformers. This normalized equation is plotted in Fig. 2 for various values of w_0 . Since the normalized coordinates ζ/ζ_0 and z/z_0 are used in Fig. 2, each curve stands for an entire set of surfaces (17).

We see from Fig. 2 that the highest concentration of the energy transmitted in a beam mode is reached in the middle plane $z = 0$, and the least concentration is reached in the phase-correcting planes

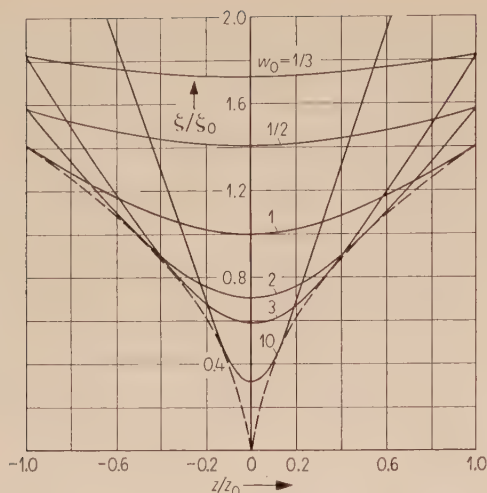


Fig. 2. Envelope curves of constant energy flux of the beam mode system, plotted in normalized coordinates.

$z = \pm z_0$. The energy concentration, moreover, depends on the parameters u_0 and v_0 . There is one value of u_0 and v_0 which maximizes the concentration in the phase planes and, therefore, yields the smallest possible cross-sectional expansion of the beam modes. This value is obtained with equation (17) if we require that x_0 and y_0 , regarded as functions of u_0 and v_0 , become minima for $z = \pm z_0$. We find

$$u_0 = v_0 = \sqrt{k/2z_0}. \quad (19)$$

Since this value is independent of n and m , the condition of maximum energy concentration can be satisfied for all beam modes simultaneously. Since u_0 and v_0 are equal, the corresponding phase correction is of circular symmetry:

$$\Delta\psi = -\psi_0 + \frac{1}{2} \frac{k}{z_0} \varrho^2, \quad \varrho^2 = x^2 + y^2. \quad (20)$$

The same phase correction is obtained if, in the case of beam modes of cylindrical symmetry, maximum energy concentration in the phase-correcting planes is required.

4. Phase Transformers of Finite Rectangular Size

The theory derived so far pertains to the ideal case of infinitely extended phase transformers which

perform the required phase transformation over the entire planes $z = z_0(2i + 1)$. In practice, only phase transformers at finite extension are feasible, so that the range in which the phase correction is actually performed is restricted to a finite area. We assume this area to be of rectangular shape. The cross-sectional limitation leads to a modification of the theory: the field distribution of the beam modes will be modified and there will be an iteration loss, since a fraction of the energy passing through one phase transformer will by-pass the following one and is lost for the iterated beam.

In accordance with the case of infinitely extended phase transformers, we denote as beam modes those fields whose distribution, in any plane $z = \text{const}$ is periodically repeated with the period $2z_0$, disregarding a complex amplitude factor whose absolute value is smaller than 1 indicating the attenuation of the beam modes per period $2z_0$.

The attenuation will be a minimum if the phase transformers yield the phase correction (20) determined from the requirements of maximum energy concentration in the phase-correcting planes. Hence, we assume that this phase correction

$$\Delta\psi = -\psi_0 + \frac{1}{2} \frac{k}{z_0} (x^2 + y^2)$$

is performed within the range $-a \leq x \leq +a$, $-b \leq y \leq +b$ of the planes $z = z_0(2i + 1)$, where $2a$ and $2b$ are the side lengths of the transformers. We assume that outside the range $-a \leq x \leq +a$, $-b \leq y \leq +b$ the planes $z = z_0(2i + 1)$ are covered by a non-reflecting absorbing screen. This assumption describes by a simple boundary condition the fact that the energy bypassing the phase transformers must be considered lost.

We suppose that the side lengths $2a$ and $2b$ of the phase transformers are large compared to the wave lengths of the transmitted fields. We are then permitted to use, as before, the simplified equations (5).

In the following discussion, we derive an integral equation for the field distribution of the beam modes in the phase-correcting planes $z = z_0(2i + 1)$. This integral equation will simultaneously yield the attenuation factor of the beam modes.

Within the plane $z = -z_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) immediately following the phase correcting plane $z = -z_0$, we assume the field distribution:

$$E^{(1,2)}(x, y, -z_0 + \varepsilon) = E(x, y) \quad \text{inside } -a \leq x \leq +a, \quad -b \leq y \leq +b, \\ = 0 \quad \text{outside } -a \leq x \leq +a, \quad -b \leq y \leq +b. \quad (21)$$

The field is zero beyond the range $-a \leq x \leq +a$, $-b \leq y \leq +b$, since this region is supposed to be covered by an absorbing screen. According to equation (5) $E^{(1)}$ and $E^{(2)}$ can be regarded as the Fourier transforms of the corresponding amplitude functions $f^{(1)}(u, v)$ and $f^{(2)}(u, v)$. Applying the inverse transformation we obtain

$$k e^{-\frac{1}{2} j \frac{u^2 + v^2}{k} z_0} f^{(1,2)}(u, v) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{x=-a}^a \int_{y=-b}^b E(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy, \quad (22)$$

where the integration needs only be extended over the range where $E^{(1,2)}(x, y, -z_0 + \varepsilon)$ is different from zero. We insert the amplitude functions $f^{(1)}(u, v)$ and $f^{(2)}(u, v)$ of equation (22) into equa-

tion (5) and obtain for $z = +z_0$ the field distribution in front of the phase transformer at $z = +z_0$:

$$E^{(1,2)}(x, y, +z_0 - \varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\xi=-a}^a \int_{\eta=-b}^b \int_{u,v=-\infty}^{\infty} E(\xi, \eta) e^{j\frac{u^2+v^2}{k}z_0} e^{j[u(x-\xi)+v(y-\eta)]} du dv d\xi d\eta. \quad (23)$$

The integration over u and v can be carried out:

$$\int_{u,v=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{u^2+v^2}{k}z_0} e^{j[u(x-\xi)+v(y-\eta)]} du dv = j \frac{\pi k}{z_0} e^{-j\frac{k}{4z_0}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]}. \quad (24)$$

Thus:

$$E^{(1,2)}(x, y, +z_0 - \varepsilon) = j \frac{k}{4\pi z_0} \int_{\xi=-a}^a \int_{\eta=-b}^b E(\xi, \eta) e^{-j\frac{1}{4}\frac{k}{z_0}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]} d\xi d\eta. \quad (25)$$

The field distribution at $z = +z_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) is obtained by applying in the range $-a \leq x \leq +a$, $-b \leq y \leq +b$ to the field (25) the phase correction (20). Outside this range the field is zero because of the absorbing screen. Hence:

$$\begin{aligned} E^{(1,2)}(x, y, +z_0 + \varepsilon) &= E^{(1,2)}(x, y, +z_0 - \varepsilon) e^{-j\left[\psi_0 - \frac{1}{2}\frac{k}{z_0}(x^2+y^2)\right]} = \\ &= j \frac{k}{4\pi z_0} e^{-j\psi_0} \int_{\xi=-a}^a \int_{\eta=-b}^b E(\xi, \eta) e^{j\frac{1}{4}\frac{k}{z_0}[(x^2+y^2)-(\xi^2+\eta^2)]} e^{j\frac{1}{2}\frac{k}{z_0}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta = \\ &\quad \text{inside } -a \leq x \leq +a, \quad -b \leq y \leq +b \\ &= 0 \quad \text{outside } -a \leq x \leq +a, \quad -b \leq y \leq +b. \end{aligned} \quad (26)$$

We do not take into account the boundary conditions of the field at the edge of the absorbing screen. These boundary conditions lead to distortions of the field, which, however, are restricted to a small range near the edge and therefore may be neglected.

For a beam mode the field distribution in the plane $z = +z_0 + \varepsilon$ is equal to the field distribution in the plane $z = -z_0 + \varepsilon$ except for a constant complex factor p :

$$E^{(1,2)}(x, y, +z_0 + \varepsilon) = p E^{(1,2)}(x, y, -z_0 + \varepsilon), \quad -\infty \leq x, y \leq +\infty. \quad (27)$$

Inserting equations (21) and (26) into this "beam-mode condition", we obtain a homogenous integral equation of the second kind for $E(x, y)$:

$$\begin{aligned} p E(x, y) e^{-j\frac{1}{4}\frac{k}{z_0}(x^2+y^2)} &= j \frac{k}{4\pi z_0} e^{-j\psi_0} \int_{\xi=-a}^a \int_{\eta=-b}^b E(\xi, \eta) e^{-j\frac{1}{4}\frac{k}{z_0}(\xi^2+\eta^2)} e^{j\frac{k}{2z_0}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta \\ &\quad \text{for } -a \leq x \leq +a, \quad -b \leq y \leq +b. \end{aligned} \quad (28)$$

Introducing the abbreviations

$$\begin{aligned} E(x, y) e^{-j\frac{1}{4}\frac{k}{z_0}(x^2+y^2)} &= F(s, t), \quad -jp e^{j\psi_0} = q, \\ \sqrt{\frac{k}{2z_0}} x, \dots, \sqrt{\frac{k}{2z_0}} \eta &= s, t, \sigma, \tau, \\ \sqrt{\frac{k}{2z_0}} a, \quad \sqrt{\frac{k}{2z_0}} b &= s_0, t_0 \end{aligned} \quad (29)$$

we can normalize equation (28):

$$\begin{aligned} q F(s, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-s_0}^{s_0} \int_{-t_0}^{t_0} F(\sigma, \tau) e^{j(\sigma s + t\tau)} d\sigma d\tau \quad (30) \\ -s_0 \leq s \leq +s_0, \quad -t_0 \leq t \leq +t_0. \end{aligned}$$

A homogenous integral equation of the second kind has, as is well known, non-trivial solutions only for certain values of the parameter q , the eigenvalues of the integral equation. The eigenvalues of equa-

tion (30) form an infinite set. The corresponding eigen solutions yield the field distribution of the beam modes at the location of the phase transformers: if the phase transformation is thought to be performed in two equal steps (by splitting each phase transformer into two closely spaced transformers, each of which yields half the total correction) then the eigen functions $F(s, t)$ represent the field distribution in-between these two steps. This is apparent from equation (29). The eigenvalues have absolute values smaller than 1 and determine the attenuation of the beam modes over the period $2z_0$.

We shall now show that the solutions of equation (30) can be written as a product,

$$F(s, t) = G(s) \cdot H(t), \quad (31)$$

where the functions $G(s)$ and $H(t)$ are even or odd functions.

With (31) the two-dimensional integral equation (30) resolves into pairs of one dimensional equations. For $G(s)$ we obtain the equation

$$\kappa G(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{s_0} G(\sigma) \cos(\sigma s) d\sigma, \quad 0 \leq s \leq s_0 \quad (32a)$$

if $G(s)$ is an even function, and

$$\kappa G(s) = j \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{s_0} G(\sigma) \sin(\sigma s) d\sigma, \quad 0 \leq s \leq s_0 \quad (32b)$$

if $G(s)$ is an odd function. The quantity κ corresponds to the quantity q in equation (30). Identical equations are obtained for $H(t)$; we only replace s , σ and s_0 by t , τ and t_0 respectively.

The theory of linear integral equations [4] shows that each of the equations (32) has an infinite set of real eigenfunctions, which in the range $0 \leq s \leq s_0$ form a complete orthogonal system. Since the solutions of equation (32a) supposedly are even functions, and the solutions of equation (32b) are odd, both sets combined form a complete orthogonal system in the range $-s_0 \leq s \leq +s_0$. The corresponding eigenvalues are real in the case of equation (32a) and imaginary in the case of equation (32b). The solutions $G(s)$ can be ordered according to decreasing absolute values of the eigenvalues. We write

$$G(s) = G_n(s; s_0), \quad \kappa = \kappa_n(s_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (33)$$

where even n shall refer to solutions of equation (32a) and odd n to solutions of equation (32b). Since $G(s)$ and $H(t)$ are determined by mathematically identical equations, the eigenfunctions $H(t)$ and the corresponding eigenvalues κ are obtained from equation (33) simply by a substitution of the variables and parameters

$$H(t) = G_m(t; t_0), \quad \kappa = \kappa_m(t_0), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

The functions $G_m(t, t_0)$ apparently form a complete orthogonal system in the range $-t_0 \leq t \leq +t_0$.

The eigenfunctions of equation (30) which satisfy the conditions (31) are given by the product functions

$$F_{n,m}(s, t) = G_n(s; s_0) \cdot H(t; t_0) \quad (35a)$$

and the corresponding eigenvalues are

$$q_{n,m} = \kappa_n(s_0) \cdot \kappa_m(t_0). \quad (35b)$$

The functions $F_{n,m}(s, t)$ obviously form a complete orthogonal system in the two-dimensional range $-s_0 \leq s \leq +s_0$, $-t_0 \leq t \leq +t_0$. From the completeness of the system we conclude that there are no further eigenfunctions; the functions (35a) represent the entire set of eigenfunctions of equation (30).

As in the case of infinitely extended phase transformers the beam modes of the finite structure have according to equations (5) the form

$$E_{n,m}^{(1)} = E_{n,m} e^{-jkz} e_x, \quad H_{n,m}^{(1)} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{n,m} e^{-jkz} e_y, \quad (36a)$$

$$E_{n,m}^{(2)} = E_{n,m} e^{-jkz} e_y, \quad H_{n,m}^{(2)} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{n,m} e^{-jkz} e_x, \quad (36b)$$

where the distribution of the functions $E_{n,m}$ in the planes $z = z_0(2i + 1)$ (after the first half of the phase correction is applied) is with equations (21) and (29) obtained from equations (35):

$$E_{n,m}[x, y, z_0(2i + 1)] = (je^{-j\psi_0} q_{n,m})^{i+1} F_{n,m} \left(\sqrt{\frac{k}{2z_0}} x, \sqrt{\frac{k}{2z_0}} y \right) \\ \text{inside } -a \leq x \leq +a, \quad -b \leq y \leq +b \\ = 0 \text{ outside } -a \leq x \leq +a, \quad -b \leq y \leq +b. \quad (36c)$$

Since the functions $F_{n,m} \left(\sqrt{\frac{k}{2z_0}} x, \sqrt{\frac{k}{2z_0}} y \right)$ are orthogonal to each other, the beam modes (which we assume to be properly normalized) still satisfy the orthogonality relations (12). This can be shown to be true not only in the planes $z = z_0(2i + 1)$ but in any plane $z = \text{const}$. Since the functions $F_{n,m} \left(\sqrt{\frac{k}{2z_0}} x, \sqrt{\frac{k}{2z_0}} y \right)$ moreover form a complete system, any field whose transverse components are known in a plane $z = \text{const}$ can mathematically be expanded into a series of beam modes. However, as in the case of infinitely extended phase transformers, this beam mode representation will have physical meaning only if the amplitude function of the expanded field is essentially restricted to very small values of u and v .

The lowest beam mode ($n = m = 0$) can be considered the "dominant" mode, with the least losses since its eigenvalue q is closest to 1. Hence, if a field composed of several beam modes passes a sufficiently large number of phase transformers, the higher beam modes will become negligible as compared to the first one and only this mode will remain.

When the side length $2a$ of the phase transformers is increased, $2a \rightarrow \infty$ while $2b = \text{const}$, the function $G_n(s, s_0)$, which according to equation (35a) determines the x -dependency of the beam modes, approaches the corresponding function obtained for infinitely extended phase transformers. Hence, with equations (19) and (8c) we have:

$$G_n(s, \infty) = \text{const} \cdot H e_n(\sqrt{2}s) e^{-s^2/2}.$$

The function $G_n(t, t_0)$ determining the y -dependency of the beam modes remains unchanged, since it does not depend on the sidelength $2a$. The absolute value of the factor $\kappa_n(s_0)$, which according to equation (35b) indicates the attenuation of the beam modes due to the limitation of the phase transformers in the x -direction, tends to 1, since there is no longer such a limitation. We have in equation (35b) $\kappa_n(\infty) = j^n$ while the factor $\kappa_m(t_0)$, since it is independent of $2a$, is unchanged. Corresponding statements are obtained in the opposite case that $2b \rightarrow \infty$ while $2a = \text{const}$.

The eigenfunctions and eigenvalues of equations (32) can be calculated by the following method. We

expand the kernels $\cos(\sigma s)$ and $\sin(\sigma s)$ of these equations in terms of the functions $G_n(s, \infty)$ i.e., in terms of the eigenfunctions of the asymptotic case $s_0 \rightarrow \infty$ [5]:

$$\cos(\sigma s) = \sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}(\sigma^2 + s^2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} \cdot H e_{2\nu}(\sqrt{2}\sigma) H e_{2\nu}(\sqrt{2}s), \tag{37 a}$$

$$\sin(\sigma s) = \sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}(\sigma^2 + s^2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} \cdot H e_{2\nu+1}(\sqrt{2}\sigma) H e_{2\nu+1}(\sqrt{2}s). \tag{37 b}$$

Replacing the kernels of equations (32) by the first N terms of these representations, we obtain approximate integral equations with degenerate kernels, which can be solved rigorously.

We represent $G(s)$ in terms of the first N functions $G_n(s, \infty)$. In the case of equation (32a) we write

$$G(s) = \sum_{\nu=0}^N c_{2\nu} H e_{2\nu}(\sqrt{2}s) e^{-s^2/2} \tag{38 a}$$

and in the case of equation (32b)

$$G(s) = \sum_{\nu=0}^N c_{2\nu+1} H e_{2\nu+1}(\sqrt{2}s) e^{-s^2/2}. \tag{38 b}$$

Then, as can be seen easily, equations (32) resolve into systems of N linear equations for the N unknown coefficients $c_{2\nu}$ and $c_{2\nu+1}$, respectively:

$$\sum_{\mu=0}^N (\beta_{\nu\mu} - \delta_{\nu\mu} \kappa) c_{2\mu} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, N, \tag{39 a}$$

$$\sum_{\mu=0}^N (\gamma_{\nu\mu} - \delta_{\nu\mu} \kappa) c_{2\mu+1} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, N \tag{39 b}$$

with

$$\beta_{\nu\mu} = \frac{2(-1)^\nu}{\sqrt{\pi}(2\nu)!} \int_0^{s_0} e^{-\sigma^2} H e_{2\nu}(\sqrt{2}\sigma) H e_{2\mu}(\sqrt{2}\sigma) d\sigma,$$

$$\gamma_{\nu\mu} = \frac{2(-1)^\nu}{\sqrt{\pi}(2\nu+1)!} \int_0^{s_0} e^{-\sigma^2} H e_{2\nu+1}(\sqrt{2}\sigma) H e_{2\mu+1}(\sqrt{2}\sigma) d\sigma,$$

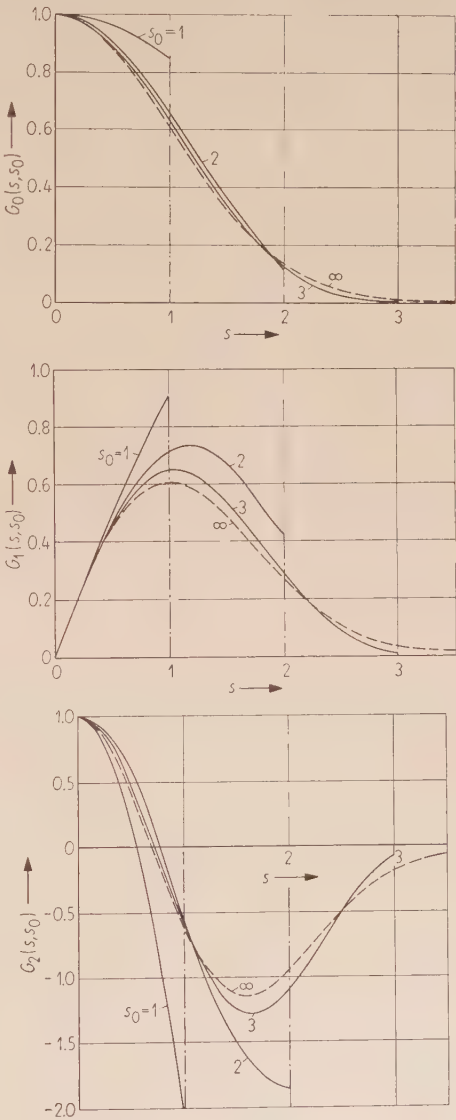
$$\delta_{\nu\mu} = \begin{matrix} 1 & \text{for } \nu = \mu \\ 0 & \text{for } \nu \neq \mu. \end{matrix}$$

The requirement that the determinants of these homogenous systems must be zero determines the eigenvalues of the approximate integral equations. When the eigenvalues are known, equations (39a) and (39b) can be solved yielding the coefficients $c_{2\nu}$ and $c_{2\nu+1}$ of the even and odd eigenfunctions (38a) and (38b). For sufficiently large N , arbitrarily accurate approximations to the eigenvalues and eigenfunctions of the exact equations (32) can be obtained.

Table I shows the first and second eigenvalue of equation (32a) and the first eigenvalue of equation (32b) for different values of s_0 . The corresponding eigenfunctions are plotted in Fig. 3 to Fig. 5.

Table I. The first eigenvalues of integral-equation (32. κ_0 and κ_2 are the first and the second eigenvalue of equation (32a), κ_1 is the first eigenvalue of equation (32b).

s_0	κ_0	κ_1	κ_2
1.0	0.75669	j0.25058	-0.03315
1.2	0.86245	j0.40661	-0.09038
1.4	0.93456	j0.58371	-0.17502
1.6	0.97453	j0.75197	-0.32936
1.8	0.99198	j0.88033	-0.51553
2.0	0.99794	j0.95504	-0.71740
2.2	0.99957	j0.98700	-0.87465
2.4	0.99992	j0.99705	-0.95725
2.6	0.99999	j0.99946	-0.98926
2.8	1.00000	j0.99992	-0.99806
3.0	1.00000	j0.99999	-0.99972



Figs. 3-5. The lowest eigenfunctions of integral-equations (32) for various values of the parameter s_0 . $G_0(s; s_0)$ and $G_2(s; s_0)$ are the first and the second eigenfunction of integral-equation (32a); $G_1(s; s_0)$ is the first eigenfunction of integral-equation (32b).

From Table I we find by a multiplication according to equation (35b) the lower eigenvalues of the integral equation (30), i.e., the attenuation factors of the lower beam modes. Table II shows the results for quadratic phase transformers ($s_0 = t_0$). We note that the eigenvalues given in Table I can

interpreted as the field distribution of the lower beam modes in the planes $z = z_0(2i + 1)$ alongside a line $y = \text{const}$, or $x = \text{const}$, where in the latter case the parameters s, s_0 must be replaced by t, t_0 .

Fig. 6 compares phase transformers of quadratic and of circular shape but of equal area with regard

Table II. The attenuation factors of the lower beam modes for quadratic phase transformers ($s_0 = t_0$).

$s_0 = t_0$	q_{00}	$q_{01} = q_{10}$	q_{11}	$q_{02} = q_{20}$	$q_{12} = q_{21}$	q_{22}
1.0	0.57258	j0.18961	-0.06279	-0.02508	-j0.00831	0.00110
2.0	0.99588	j0.95307	-0.91210	-0.71592	-j0.68515	0.51466
3.0	1.00000	j0.99999	-0.99998	-0.99972	-j0.99971	0.99944

be regarded as attenuation factors of a system of phase transformers finitely bounded only in the x -direction, but infinitely extended in the y -direction or vice versa, since in this case one of the factors in equation (35b) has the absolute value 1. Fig. 3 to Fig. 5 can according to equation (35a) be

to the attenuation factor of the dominant beam mode ($n = m = 0$). The abscissa refers to $\sqrt{\frac{k}{2z_0}} F$,

where F denotes the area of the phase transformers. The ordinate shows $|q|^2$ in dB-scale indicating the power loss per phase transformer. Quadratic phase transformers, as one should expect, cause higher losses than circular phase transformers of equal area. It can be shown by a variational method that among phase transformers of equal area but different shape, circular phase transformers yield minimum attenuation for the dominant beam mode.

The author wishes to thank Dr. G. GOUBAU for many helpful discussions. He also wishes to thank Dr. I. EPSTEIN for his advice in solving the integral equations.

Schrifttum

- [1] GOUBAU, G. and SCHWERING, F., On the guided propagation of electromagnetic wave beams. Transact. Inst. Radio Engrs. AP-9 [1961], 248-256.
- [2] MAGNUS, W. and OBERHETTINGER, F., Functions of mathematical physics. Chelsea Publishing Co., Toronto 1954, p. 80-82.
- [3] ERDÉLYI, A. et al., Tables of integral transforms, vol. 1. Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill Book Co., New York 1953, p. 32, 95.
- [4] SCHMEIDLER, W., Integralgleichungen. Akad. Verlagsges., Leipzig 1950, S. 265-324.
- [5] ERDÉLYI, A. et al., Higher transcendental functions, vol 2. Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill Book Co., New York 1953, p. 194.

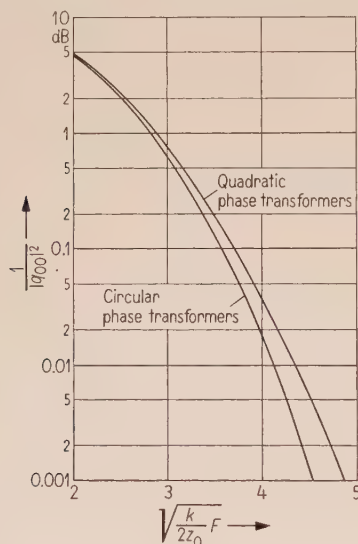


Fig. 6. The attenuation factor of the dominant beam mode for quadratic and for circular phase transformers.

Kathodenstrahlröhren mit Nachablenkung

VON WERNER THOMMEN

Mitteilung aus dem Institut für höhere Elektrotechnik der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

(A.E.Ü. 15 [1961], 565–568; eingegangen am 18. August 1961)

DK 621.385.832

Wird in einer Kathodenstrahlröhre anschließend an das gewöhnliche Ablensystem ein Nachablenksystem angebracht, so läßt sich dadurch eine wesentliche Steigerung der Ablenkempfindlichkeit erreichen, hingegen wird die Strahlfokussierung sehr nachteilig beeinflusst. An einem Beispiel wird zuerst gezeigt, daß sich eine Nachablenkung mit relativ einfachen Mitteln erreichen läßt. Anschließend wird aber nachgewiesen, daß durch die Verwendung eines Nachablenksystems, ganz unabhängig welcher Art, die Vergrößerung des Brennflecks auf dem Bildschirm größer wird als die Empfindlichkeitssteigerung. Das Prinzip der Nachablenkung ist deshalb in der Meßtechnik nicht brauchbar.

In order to increase the deflection sensitivity of cathode-ray tubes, one may use post-deflection. Unfortunately in this case the beam focusing deteriorates. At first it is shown that efficient post-deflection can be obtained with relatively little expense. Then it is demonstrated that any kind of post-deflection system would cause an enlargement of the beam spot on the screen which is always greater than the increase in sensitivity. Therefore the principle of post-deflection may not be used effectively to increase the sensitivity of cathode-ray tubes.

1. Einleitung

Um in einer Elektronenstrahlröhre eine Steigerung der Ablenkempfindlichkeit zu erhalten, wurde von mehreren Autoren [1], [2], [3] die Verwendung eines Nachablenksystems vorgeschlagen. In diesem Fall durchläuft der Elektronenstrahl anschließend an das normale Ablensystem ein konstantes Nachablenkfeld, welches bewirkt, daß der vom ersten System herrührende Ablenkwinkel um einen konstanten Faktor vergrößert wird. Eine Empfindlichkeitssteigerung wäre vor allem für HF-Oszillographenröhren von großem Interesse. Der heikle Punkt bei der praktischen Ausführung besteht nicht darin, ein Feld zu finden, mit welchem sich die gewünschte Winkelmultiplikation erreichen läßt, sondern die Schwierigkeiten sind vor allem durch eine Verschlechterung der Strahlfokussierung im Nachablenkfeld bedingt.

2. Beispiel eines Nachablenksystems

Eine elektrostatische Nachablenkung läßt sich erreichen, wenn die Feldstärke \vec{E} des Nachablenkfeldes die Komponenten

$$E_x = -Kx, \quad E_y = +Ky, \quad E_z = 0 \quad (1)$$

besitzt. Dabei ist die z -Achse durch die Röhrenachse gegeben, K ist eine Konstante. Ein solches Feld läßt

sich realisieren, denn es erfüllt die beiden Bedingungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\rho/\epsilon_0 = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0.$$

Die zur Erzeugung dieses Feldes notwendigen Elektrodenformen erhält man durch die Bestimmung von Potentialflächen. Herrscht auf der z -Achse das Potential V_0 , so ist das Potential im Punkt x, y

$$V(x, y) = V_0 + \int_0^{x,y} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_0 + \int_0^x E_x dx + \int_0^y E_y dy,$$

$$V(x, y) = V_0 + \frac{K}{2} (y^2 - x^2).$$

Potentiallinien sind die Kurven $V = \text{const}$, in diesem Fall also Hyperbeln mit den Asymptoten $y = \pm x$ (Bild 1).

Um die Wirkung des Nachablenkfeldes zu berechnen, werden einige Vereinfachungen durchgeführt:

1. Der Elektronenstrahl sei unendlich dünn.
2. Das Nachablenkfeld sei nur im Raum zwischen den Nachablenkelektroden vorhanden und dort unabhängig von z , d. h. das Streufeld wird vernachlässigt.
3. Die Spannung der Nachablenkelektroden sei klein gegenüber der Beschleunigungsspannung U_0 der Elektronenkanone.

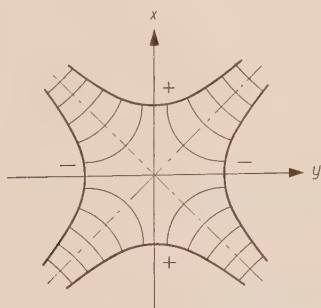


Bild 1. Elektrodenform eines elektrostatischen Nachablenksystems. Schnitt senkrecht zur Röhrenachse.

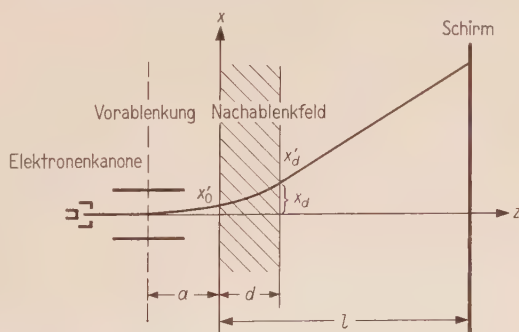


Bild 2. Elektrodenanordnung einer Röhre mit Nachablenkung.

Mit diesen Vereinfachungen ist die Neigung x'_d mit der ein Strahl in der x, z -Ebene aus dem Nachablenkfeld austritt (Bild 2) gegeben durch den im Anhang hergeleiteten Ausdruck

$$x'_d = (\cosh kd + ak \sinh kd) x'_0 \quad (2)$$

mit

d der Länge des Nachablenkfeldes,

a dem Abstand Vorablenkung — Nachablenkfeld,

k einer Konstante $= \sqrt{K/2U_0}$,

x'_0 der Neigung der Elektronenbahn beim Eintritt in das Nachablenkfeld.

Der Quotient x'_d/x'_0 ist unabhängig von der Vorablenkung x'_0 , es resultiert also eine Vergrößerung des Ablenkungswinkels um einen konstanten Faktor und damit auch eine konstante Empfindlichkeitssteigerung. Ziemlich analoge Verhältnisse gelten in der y, z -Ebene

$$y'_d = (\cos kd - ak \sin kd) y'_0.$$

Schwache Felder ergeben hier eine Verkleinerung, stärkere Felder aber eine Umkehrung der Ablenkung.

Wir lassen nun die grobe Voraussetzung des unendlich dünnen Strahles fallen, setzen aber voraus, daß der fokussierte Strahl einen punktförmigen Brennfleck besitze. Die Raumladung werde weiterhin vernachlässigt, was bei den in Oszillographenröhren gebrauchten Strömen und Spannungen zulässig ist. Es ist nun zu untersuchen, ob es unter diesen Voraussetzungen möglich ist, den Strahl so zu fokussieren, daß bei eingeschalteter Nachablenkung der Brennfleck in der Schirmebene liegt.

Wir betrachten den unabgelenkten Strahl in der x, z -Ebene (Bild 3). Da die Streufelder und die Raumladung vernachlässigt werden, verlaufen die Elektronenbahnen außerhalb des Nachablenkfeldes geradlinig. Ohne Nachablenkfeld würde der Strahl seinen Brennfleck im Punkt F besitzen, sämtliche Elektronenbahnen, die dem Strahl angehören, erfüllen damit die Beziehung zwischen den Anfangsbedingungen x_0 und x'_0

$$x_0 = -f_0 x'_0. \quad (3)$$

Wird Gl. (3) in die Bahngleichung des Nachablenkfeldes (siehe Anhang Gl. (16)) eingesetzt, so ergeben sich beim Austritt aus dem Nachablenkfeld die Werte

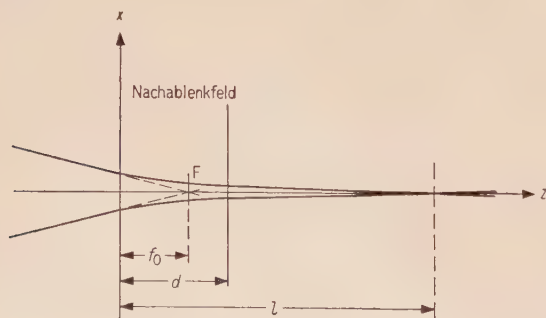


Bild 3. Brennfleckverschiebung des Elektronenstrahls durch das Nachablenkfeld.

$$x_d = x_0 \cosh kd - \frac{x_0}{f_0 k} \sinh kd,$$

$$x'_d = k x_0 \sinh kd - \frac{x_0}{f_0} \cosh kd.$$

Der Schnittpunkt dieser Elektronenbahnen mit der z -Achse ist gegeben durch

$$l - d = -\frac{x_d}{x'_d} = \frac{f_0 \cosh kd - \frac{1}{k} \sinh kd}{\cosh kd - f_0 k \sinh kd}.$$

$l - d$ ist unabhängig von x_0 , d. h., es schneiden sämtliche Elektronenbahnen des durch F bestimmten Strahlenbüschels die z -Achse im Punkt $z = l$. Dieser bildet den neuen Brennpunkt.

Wird beim abgelenkten Strahl die Defokussierung durch das Vorablenksystem vernachlässigt, so läßt sich zeigen, daß die z -Koordinate des Brennpunktes unabhängig vom Vorablenkwinkel ist. Ebenso wie in der x, z -Ebene ergibt sich in der y, z -Ebene für den Strahl eine von der Ablenkung unabhängige Fokussierung. Es lassen sich dann Bedingungen aufstellen, für welche die z -Koordinate des Brennpunktes in beiden Ebenen gleich groß ist, so daß kein astigmatischer Fehler auftritt.

Unter diesen vereinfachenden Annahmen scheint das Prinzip der Nachablenkung sehr interessante Möglichkeiten zu eröffnen.

3. Der Einfluß des Nachablenksystems auf die Strahlungengauigkeiten

Wegen mehrerer, nicht vermeidbarer Ursachen (Dispersionen des Elektronenstrahls, endliche Kathodengröße, Linsenfehler, Raumladung [4], [5], [6]) ist es nicht möglich, einen punktförmigen Brennfleck zu erhalten. Ein Elektronenstrahl kann bei gegebenen Verhältnissen nicht schärfer als auf einen bestimmten, minimalen Durchmesser fokussiert werden. Es ist nun zu untersuchen, wie groß in diesem Fall der minimale Leuchtfleckdurchmesser auf dem Bildschirm wird. Über das Nachablenksystem sei einzig und allein vorausgesetzt, daß es eine Empfindlichkeitssteigerung um den konstanten Faktor n verursache.

Bei einem gegebenen Ablenkfeld ist die Auslenkung h eines Elektrons auf dem Schirm abhängig von den Anfangsbedingungen x_0 und x'_0 beim Eintritt in das Nachablenkfeld (Bild 4):

$$h = F(x_0, x'_0).$$

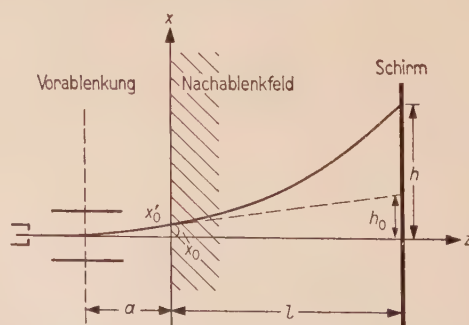


Bild 4. Elektronenstrahl in einer Röhre mit Nachablenkung. Das Nachablenkfeld beginnt bei $z = 0$.

Da die Auslenkung ohne Nachablenkung proportional zu x'_0 ist, und weil laut Voraussetzung die Empfindlichkeitssteigerung konstant ist, muß auch h proportional zu x'_0 sein:

$$h = cx'_0 = F(x_0, x'_0).$$

Vor dem Eintritt der Elektronen in das Nachablenkfeld können die Elektronenbahnen als Geraden betrachtet werden. x_0 ist daher proportional zu x'_0 . $F(x_0, x'_0)$ kann somit nur die Form

$$F(x_0, x'_0) = Ax_0 + Bx'_0 \quad (4)$$

aufweisen. Die Konstanten A und B lassen sich mit den geometrischen Größen der Röhre in Beziehung bringen.

a) Für die Strahlenachse eines um den Winkel φ abgelenkten Strahlenbündels gilt (siehe Bild 4):

$$h = n h_0 = n(a + l) \tan \varphi = n(a + l) x'_0. \quad (5)$$

Die Beziehung $x_0 = ax'_0$

wird eingesetzt in Gl. (4)

$$h = Ax_0 + Bx'_0 = (aA + B)x'_0. \quad (6)$$

Aus Gl. (5) und (6) folgt dann

$$n(a + l) = aA + B. \quad (7)$$

b) Beim idealisierten, unabgelenkten Strahl mit punktförmigem Brennfleck (siehe Bild 3) gilt die Beziehung (3)

$$x_0 = -f_0 x'_0,$$

bzw. eingesetzt in Gl. (4)

$$h = -f_0 A x'_0 + B x'_0.$$

Da wir einen unabgelenkten Strahl angenommen haben, ist die Auslenkung h gleich Null. Es gilt daher

$$B = f_0 A. \quad (8)$$

Aus Gl. (7) und (8) werden nun A und B ausgerechnet und in Gl. (4) eingesetzt:

$$h = \frac{(a + l)n}{a + f_0} (x_0 + f_0 x'_0). \quad (9)$$

Diese Beziehung wird nun auf einen Strahl angewendet, der, wie es in Wirklichkeit immer der Fall ist, nicht genau auf einen Punkt fokussiert werden kann. Der Strahl werde nicht vorabgelenkt und besitze (ohne Nachablenkfeld) einen minimalen Strahldurchmesser 2ϱ (Bild 5).

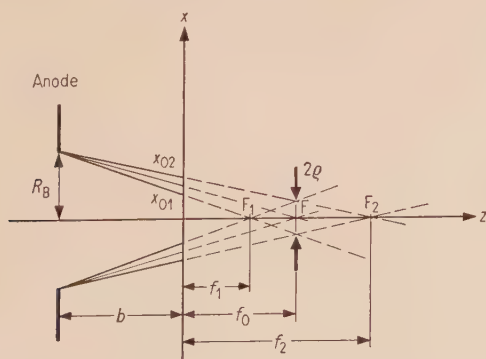


Bild 5. Elektronenstrahl mit einem endlichen Brennfleck;
 R_B Radius der Anodenblende,
 b Abstand Anode—Anfang des Nachablenksystems.

Die Fokussierung sei so eingerichtet, daß die Strahlen, die dem mittleren Büschel angehören (bestimmt durch den Punkt F), bei eingeschaltetem Nachablenkfeld ihren Brennpunkt auf dem Bildschirm besitzen. Gesucht ist die Ablenkung der beiden durch F_1 und F_2 gegebenen extremen Strahlen.

Die Auslenkung des äußeren Strahls beim Schirm wird mit δ_a bezeichnet. Seine Anfangsbedingungen sind:

$$x_{02} = \frac{f_2}{f_2 + b} R_B, \quad x'_{02} = -\frac{R_B}{f_2 + b}.$$

Diese Anfangsbedingungen in Gl. (9) eingesetzt ergeben

$$\delta_a = \frac{(a + l)n}{a + f_0} \left(\frac{f_2 R_B}{f_2 + b} - \frac{f_0 R_B}{f_2 + b} \right).$$

Aus Bild 5 läßt sich die Beziehung

$$\frac{f_2 - f_0}{f_2 + b} = \frac{\varrho}{R_B}$$

entnehmen. Somit erhält man

$$\delta_a = \frac{a + l}{a + f_0} n \varrho.$$

Die analoge Überlegung für den inneren Strahl liefert

$$\delta_i = -\frac{a + l}{a + f_0} n \varrho.$$

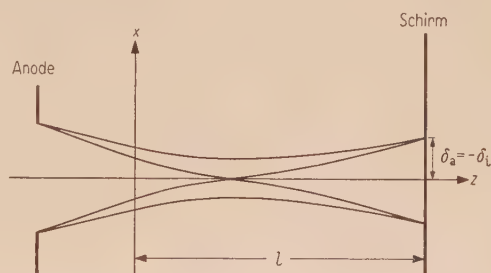


Bild 6. Vergrößerung des Strahlquerschnitts durch das Nachablenkfeld (unabgelenkter Strahl).

Die Fleckvergrößerung durch das Nachablenkfeld ist damit (Bild 6)

$$\frac{\delta}{\varrho} = \frac{a + l}{a + f_0} n. \quad (10)$$

a und l sind durch die Röhrenkonstruktion gegebene Größen. f_0 hängt vor allem von der Empfindlichkeitssteigerung n und von der Art des Nachablenkfeldes ab. Will man eine Erhöhung der Empfindlichkeit, so müssen die Elektronen im Nachablenkfeld eine Kraft erfahren, die von der Achse weggerichtet ist. Die Elektronenbahnen werden also von der Achse weggebogen. Es gilt daher

$$f_0 < l.$$

Vernachlässigt man die bei einer Ablenkung auftretende Defokussierung durch das Vorablenksystem, so gilt wegen des linearen Charakters der Nachablenkung die berechnete Fleckvergrößerung nicht nur für den unabgelenkten Strahl, sondern für jeden beliebigen Ablenkswinkel.

4. Das Auflösungsvermögen

Die Frage, ob mit der Verwendung eines Nachablenksystems etwas gewonnen wird, kann weitgehend beantwortet werden, wenn wir das Auflösungsvermögen betrachten. Zu diesem Zweck wird eine gewöhnliche Kathodenstrahlröhre verglichen mit einer sonst gleichen, aber mit einem Nachablenksystem versehenen Röhre. Ein Maß für das Auflösungsvermögen ist die Ablenkempfindlichkeit dividiert durch die minimale Fleckgröße auf dem Leuchtschirm.

Es kann nicht angenommen werden, daß der ideelle Brennfleckdurchmesser 2ϱ bei der Röhre mit Nachablenkung gleich groß ist wie der minimale Brennfleckdurchmesser, wenn der Strahl ohne Nachablenkfeld auf den Schirm fokussiert wird. Die Änderung des minimal möglichen Durchmessers als Funktion des Abstandes Brennfleck — Anode der Elektronenkanone läßt sich infolge der Vielfältigkeit des Problems nicht ohne weiteres angeben. Um bei der Abschätzung des Auflösungsvermögens auf der sicheren Seite zu sein, wird angenommen, daß die minimal erreichbare Brennfleckgröße proportional sei zum Abstand Anode — Brennfleck. In Wirklichkeit ist die Abhängigkeit viel geringer.

Die Empfindlichkeit der normalen Kathodenstrahlröhre sei μ , der minimale Fleckdurchmesser auf dem Schirm $2\varrho_0$. Ist ein Nachablenksystem vorhanden, so muß die Strahlfokussierung verändert werden. Der Brennfleck rückt näher zur Anode und wird damit kleiner. Bei der angenommenen Abhängigkeit gilt

$$\varrho = \frac{b + f_0}{b + l} \varrho_0.$$

Wegen der Fleckvergrößerung (Gl. (10)) wird der Leuchtfleckdurchmesser auf dem Schirm

$$2\delta = 2 \frac{a + l}{a + f_0} n \varrho = 2 \frac{a + l}{a + f_0} \frac{b + f_0}{b + l} \varrho_0 n. \quad (11)$$

Mit den beiden Ungleichungen

$$b > a \text{ und } l > f_0$$

gilt

$$\frac{a + l}{a + f_0} \frac{b + f_0}{b + l} > 1.$$

Damit wird aus Gl. (11)

$$\delta > \varrho_0 n. \quad (12)$$

Das Auflösungsvermögen ohne Nachablenkung ist gegeben durch μ/ϱ_0 , mit Nachablenkung ist es $n\mu/\delta$. Infolge der Ungleichung (12) erhält man

$$\frac{n\mu}{\delta} < \frac{\mu}{\varrho_0}. \quad (13)$$

Das Auflösungsvermögen wird somit durch den Einbau eines Nachablenksystems verschlechtert. Dieses Resultat gilt ganz unabhängig von der Art des Nachablenkfeldes, da ja als einzige Voraussetzung eine konstante Empfindlichkeitssteigerung angenommen wurde. Dies führt zu der wichtigen Schlußfolgerung, daß wegen der Verschlechterung des Auflösungs-

vermögens eine Nachablenkung, trotz der dadurch möglichen Vergrößerung der Empfindlichkeit, für oszillographische Zwecke nicht zu gebrauchen ist.

Zum Schluß möchte ich noch Herrn Prof. Dr. A. PINCIROLI (Turin) für seine Anregung zu dieser Arbeit und Herrn Prof. Dr. M. J. O. STRUTT für sein Interesse und für Diskussionen bestens danken.

Anhang

Bahngleichung in der x, z -Ebene des Nachablenkfeldes

Infolge der getroffenen Annahmen besitzt die Feldstärke in der x, z -Ebene des Nachablenkfeldes nur eine Komponente in der x -Richtung.

Die Bewegungsgleichung in der x -Richtung lautet

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{e}{m} E_x. \quad (14)$$

Wegen

$$\frac{dz}{dt} = v_z = \sqrt{\frac{2e}{m}} U_0,$$

wobei U_0 die Beschleunigungsspannung der Elektronenkanone ist, gilt

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{2e}{m} U_0 \frac{d^2 x}{dz^2}.$$

Damit schreibt sich Gl. (14)

$$\frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{1}{2 U_0} E_x = 0.$$

Wird noch die Beziehung (1) berücksichtigt, so erhält man

$$\frac{d^2 x}{dz^2} - \frac{K}{2 U_0} x = 0. \quad (15)$$

Mit der Abkürzung

$$\frac{K}{2 U_0} = k^2$$

ist die Lösung dieser Differentialgleichung gegeben durch

$$x(z) = x_0 \cosh kz + \frac{x'_0}{k} \sinh kz. \quad (16)$$

x_0 und x'_0 sind die Anfangsbedingungen bei $z = 0$.

Wird Gl. (16) nach z differenziert und anschließend $z = d$ gesetzt, so ergibt sich die Beziehung (2).

Schrifttum

- [1] GASSMANN, G. G., Allgemeine Untersuchung von Bildtransformationen auf dem Bildschirm von Kathodenstrahlröhren, hervorgerufen durch konstante Ablenkfelder. A.E.Ü. **14** [1960], 71–76.
- [2] OVERTON, B. R., Transistors in television receivers. J. Telev. Soc. **8** [1958], 458–462.
- [3] Patente über magnetische Nachablenkung:
a) Hazeltine Corp., Britisches Patent Nr. 500, 502 (1938),
b) HOLLMANN, H. E., Reichspatentschrift Nr. 725, 146 (1938),
c) Philco, Britisches Patent Nr. 650,044 (1946),
d) BULL, E. W., Britisches Patent Nr. 739,068 (1952).
- [4] BRAUCKE, F. W., Fernfokusstrahlensystem. Dissertation Technische Hochschule Braunschweig (1956).
- [5] GUNDELT, E., Dimensionierung von Kathodenstrahlröhren. Telefunken-Röhre, Heft 30 (1953), 70–82.
- [6] DOSSE, J., Theoretische und experimentelle Untersuchungen über Elektronenstrahler. Z. Phys. **115** [1940], 530–556.

Vertikale Bewegungsvorgänge in der nächtlichen Ionosphäre

VON WALTER BECKER

Mitteilung aus dem Max-Planck-Institut für Aeronomie, Institut für
Ionosphären-Physik, Lindau über Northeim/Hann.

(A. E. Ü. 15 [1961], 569–577; eingegangen am 14. Juli 1961)

DK 551.510.535.4

Elektronendichteprofile der F-Schicht, hergeleitet aus Lindauer Ionogrammen der Jahre 1957 bis 1960, ließen während einer sehr starken erdmagnetischen Baistörung einen Gesamthub von 200 km bei einer Vertikalgeschwindigkeit von etwa 30 m/s erkennen. Für erdmagnetisch sehr ruhige Nächte konnten mitunter kurzzeitige Höhenänderungen von zwei bis drei Stunden Dauer bei einem Hub von 60 km gefunden werden. Das Höhenintervall, innerhalb dessen das Maximum der F-Schicht an verschiedenen Nächten der Wintermonate angetroffen werden kann, umfaßt etwa 120 km. Im Sommer beträgt dieser Bereich nur etwa 30 km. Der Anstieg der F-Schicht in den Abendstunden und das Absinken nach Mitternacht zeigen keinerlei Zusammenhang mit dem optischen Sonnenauf- bzw. -untergang in der Höhe der F-Schicht. Der Anstieg erfolgt zwischen 20 und 21 Uhr GMT. Für die Wintermonate wurde ein Hub von etwa 70 km und für die Sommermonate ein solcher von etwa 40 km festgestellt. Es konnte weiter gezeigt werden, daß F-Streuechos bis zu starker Intensität während erdmagnetisch sehr ruhiger Nächte in Lindau/Harz beobachtet werden können und daß diese keineswegs eine Folge von größeren Vertikalbewegungen der F-Schicht zu sein brauchen.

Electron density profiles of the F-layer, as derived from Lindau ionograms of the years 1957 through 1960, showed during a very strong geomagnetic bay disturbance a total vertical shift of 200 km with a vertical speed of about 30 m/s. For geomagnetically very calm nights short-time height variations of two to three hours duration could be found at times with a vertical shift of 60 km. The height interval within which the maximum of the F-layer can be encountered in different nights of the winter months is about 120 km. In the summer this range amounts to about 30 km only. The rise of the F-layer in the evening hours and its lowering after midnight show no relationship with the optical sunrise and sunset at the level of the F-layer. The rise takes place between 20 and 21 hrs. GMT. For the winter months a vertical shift of about 70 km and for the summer months one of about 40 km were found. It could further be shown that spread-F-echoes of even strong intensities can be observed during geomagnetically very calm nights at Lindau/Harz and that these by no means have to be a consequence of greater vertical motions of the F-layer.

1. Einleitung

Schon die Beobachtung der leuchtenden Nachthimmelwolken [1] und später die Ausmessung der sich verformenden Meteorschweife [2] ließen erkennen, daß auch die hohe und höchste Atmosphäre keine statischen Gebilde sind. Man beschränkte sich in der Folgezeit jedoch im wesentlichen [3] auf die Beobachtung der horizontalen Driftkomponente. Beobachtungen der Vertikalkomponente wurden kaum angestellt. Es fehlte bis vor kurzem wohl an den geeigneten Methoden.

Zeitlich genügend dichte Ionogramm-Folgen (Panoramafilme der Ionosphäre) und insbesondere die Störungen in Ionogrammen der F-Schicht, die von großen nach kleinen Höhen zu wandern scheinen [4], ließen zwar beachtenswerte Beträge der Vertikalkomponente vermuten, aber erst als es gelungen war, Elektronendichteprofile der Ionosphäre aus Ionogrammen zu berechnen, konnte schließlich die vertikale Wanderungsgeschwindigkeit dieser Profilstörungen zu 115 ± 35 m/s bestimmt werden [5]. Auch die Änderungen der minimalen scheinbaren Reflexionshöhen der F-Schicht während erdmagnetischer Baistörungen ließen Vertikalbewegungen der gesamten F-Schicht vermuten [6]. Aber erst die abgeleiteten Elektronendichteprofile erlaubten quantitative Angaben [7].

Im folgenden soll ganz allgemein über Vertikalbewegungen der nächtlichen F-Schicht berichtet

werden. Die nächtliche Ionosphäre wurde deshalb gewählt, weil bei Nacht praktisch keinerlei Schichtneubildung durch Ionisierung stattfindet, so daß man das Schicksal ein und derselben Ladungsträger verfolgen kann. Schließlich ist auch das Elektronendichteprofil der nächtlichen Ionosphäre monoton, so daß recht genaue Höhenbestimmungen möglich sind. Um die Höhenänderungen selbst zu gewinnen, wurden die Elektronendichteprofile der F-Schicht normalisiert. Der Grund hierfür ist leicht einzusehen. Die Höhenänderung der Niveaus gleicher Elektronendichte müßte nämlich im Gegensatz zur Höhenänderung der Niveaus konstanter Relativwerte der normalisierten Profile den Grenzfrequenzgang der F-Schicht mit beinhalten. Eine Höhenänderung um etwa die halbe Dicke der F-Schicht könnte so vorgetäuscht werden. Zum Studium der lokalen Ausdehnung der Störungen wurden zwei Lotungsstationen in einer Entfernung von 100 bzw. 150 km von Lindau zusätzlich in Betrieb genommen. Über deren Beobachtungen soll hier gleichfalls berichtet werden.

Über die Lindauer Auswerteverfahren wurde hier schon berichtet [8]; es bleibt darum nur noch zu sagen, daß die Genauigkeit der Höhenangaben in dieser Arbeit besser als ± 5 km ist, sofern die Daten aus ungestörten Ionogrammen, d. h. bei Fehlen von F-Streuechos, gewonnen wurden. Wann derartige Streuechos beobachtet wurden, ist in den Bildern vermerkt. Der Fehlerbereich der schlechtesten

Werte, d. h. solcher, die aus Ionogrammen mit starken F-Streuechos gewonnen wurden, ist kleiner als ± 20 km.

2. Vertikale Drift der F-Schicht während erdmagnetischer Baistörungen

Daß die Änderung der minimalen scheinbaren Reflexionshöhe während erdmagnetischer Baistörungen auch im Verlauf der tatsächlichen Reflexionshöhen, der „wahren Höhen“, zu erkennen ist, konnte recht bald gezeigt werden [9]. Ein weiteres Beispiel dieser Art liegt den Bildern 1a und 1b zugrunde.

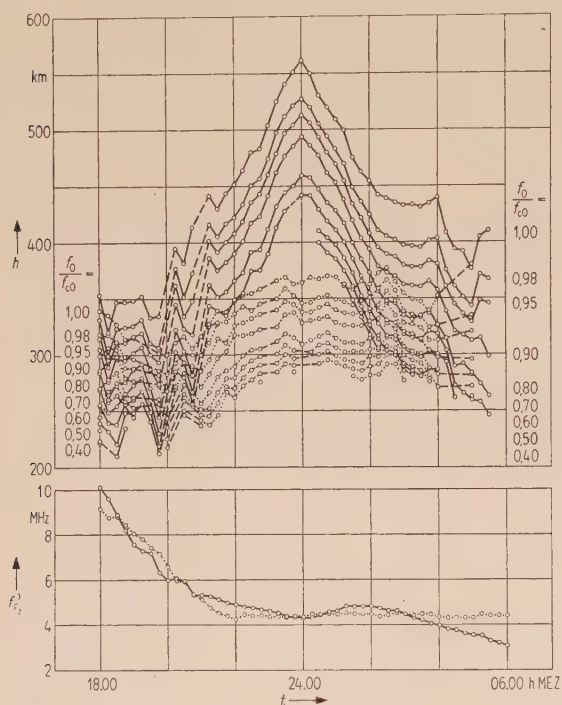


Bild 1a. Höhenänderung der Schichtlinien der normalisierten F-Schicht-Elektronendichteprofile. f_0 Plasmafrequenz; $f_{c0} = f_{F_2}^0$ Grenzfrequenz der F-Schicht in der Nacht vom 2./3. Dezember 1958 (—) und in der Nacht vom 30. November/1. Dezember 1958 (.....); ——— bedeutet Interpolation.

In Bild 1a sind die Schichtlinien der normalisierten Elektronendichteprofile für die erdmagnetisch gestörte Nacht (2./3. Dezember 1958) und eine sehr ruhige Nacht (30. November/1. Dezember 1958) eingetragen. Mit f_0 ist die jeweilige Plasmafrequenz und mit $f_{c0} = f_{F_2}^0$ die Grenzfrequenz der F-Schicht bezeichnet. Gestrichelte Kurvenstücke sollen sagen, daß eine Reduktion der jeweiligen Ionogramme aus irgendwelchen Gründen nicht möglich war, z. B. wegen zu hoher Absorption, Abdeckung durch sporadische E-Ionisierung, starker Streu-Reflexionen oder wegen Gerätestörungen. In Bild 1b ist der Höhenunterschied Δh_m der F-Schicht-Maxima beider Nächte eingetragen. Weiter ist die mittlere Krümmung im Maximum der normalisierten F-

Schichtprofile der gestörten Nacht angegeben. Zu diesem Zweck wurde die halbe Schichtdicke \bar{Y}_m einer parabolischen Approximation des Schichtmaximums bestimmt [10]. Mit $\Delta f_{F_2}^0$ ist der F_2 -Grenzfrequenzunterschied bezeichnet. H , D und Z messen die Intensitäten der erdmagnetischen Nord-Süd-, Ost-West- und der Vertikalkomponente. Erstaunlich, theoretisch aber ohne weiteres verständlich, ist der geringe Unterschied in den Grenzfrequenzen beider Nächte. Unglaublich groß erscheint der Anstieg der F-Schicht während der

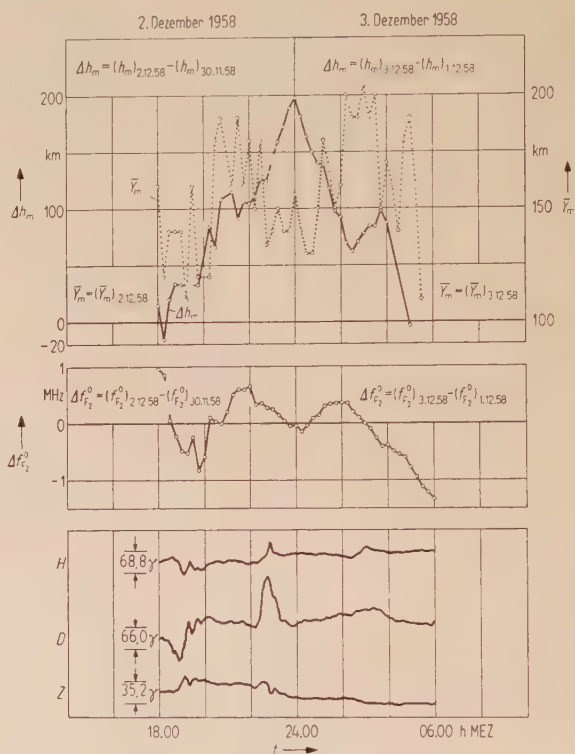


Bild 1b. Δh_m mißt die Höhendifferenz der F-Schicht-Maxima während der erdmagnetisch gestörten Nacht 2./3. Dezember 1958 gegenüber der ruhigen Nacht 30. November/1. Dezember 1958. \bar{Y}_m entspricht der mittleren halben Dicke einer parabolischen Approximation des F-Schicht-Maximums am 2./3. Dezember 1958. Mit $\Delta f_{F_2}^0$ ist die jeweilige F-Grenzfrequenzdifferenz beider Nächte bezeichnet. H , D und Z messen die Intensitäten der Nord-Süd-, Ost-West- und Vertikalkomponente des erdmagnetischen Feldes.

erdmagnetischen Störung; er beträgt 200 km. Das Maximum des Hubs fällt mit dem Ende der zusätzlichen positiven Baistörung zusammen. Aber auch diese beiden Phänomene stimmen mit der Theorie überein. Das horizontale Feld nämlich, welches das Stromsystem der Baistörung hervorruft, ist auch in der F-Schicht wirksam [11]. D. h. Elektronen wie Ionen werden beschleunigt und gleichzeitig durch die Lorentz-Kraft senkrecht zum erdmagnetischen und elektrischen Feld gleichermaßen abgelenkt. Die Ionen bestimmen jedoch wegen ihrer großen Masse die Dauer des Einschwingvorganges und nicht die

Elektronen. Polarisationsfelder würden nämlich eine Ladungsstreuung nicht zulassen. Nach ein bis zwei Minuten [9] ist der stationäre Zustand erreicht. Wie Bild 1b zeigt, können Vertikalgeschwindigkeiten des F-Plasmas von etwa 30 m/s auftreten. Die zugehörige Horizontalkomponente ist bei einer erdmagnetischen Inklination von 67° etwa zweimal so groß, also 60 m/s. Untersuchungen sind derzeit im Gange, um diesen theoretisch gefundenen Zusammenhang experimentell zu bestätigen. Der geringe Grenzfrequenzunterschied zwischen beiden Nächten rührt davon her, daß die gesamte F-Schicht angehoben wird. Noch nicht geklärt ist die Dynamik im einzelnen. Bild 1b läßt eine Abflachung des F-Maximums und gleichzeitig eine wenn auch geringe Grenzfrequenzzunahme erkennen und umgekehrt. Man würde das Gegenteil erwarten. Weitere Beobachtungen werden aber noch zu klären haben, ob diese Feststellung allgemein gültig ist. Leider sind schöne erdmagnetische Baistörungen während der Nachtstunden bei ungestörten ionosphärischen Bedingungen wie z. B. fehlende Abdeckung durch sporadische E-Ionisierung sowie Fehlen von F-Streuechos sehr selten. Hinzu kommen noch vertikale Bewegungs-

vorgänge in der F-Region auch während erdmagnetisch äußerst ruhiger Bedingungen, worüber hier noch zu sprechen sein wird. Das bedeutet, daß die experimentelle Klärung der Dynamik der Schichtbewegungen noch einige Zeit dauern dürfte.

Bild 2 läßt derartige Schichtbewegungen während erdmagnetisch ruhiger Bedingungen vermuten. Wie man sieht, fällt das Ende der Baistörung keineswegs mit dem Maximum des Hubs der F-Schicht zusammen. Die Verzögerung beträgt etwa eine dreiviertel Stunde.

In Bild 2 ist weiter die Intensität der gleichzeitig beobachteten F-Streuechos eingetragen; sie ist in einer willkürlichen Skala 0, 1, 2, 3 ausgedrückt. Über diese Echos soll im Abschnitt 4 noch näheres gesagt werden. Hier möge nur festgehalten werden, daß während des Hubs und des Absinkens der F-Schicht diese Echos nicht beobachtet werden.

3. Vertikale Bewegung der F-Schicht während erdmagnetisch sehr ruhiger Bedingungen

3.1. Kurzzeitige Störungen

Beobachtungen der Art von Bild 2 gaben den Anlaß zu diesen Untersuchungen. Bild 3 zeigt noch einmal den Schichtlinienverlauf für die Nacht vom 30. November/1. Dezember 1958, wie er in Bild 1a, b zum Vergleich mit eingezeichnet war.

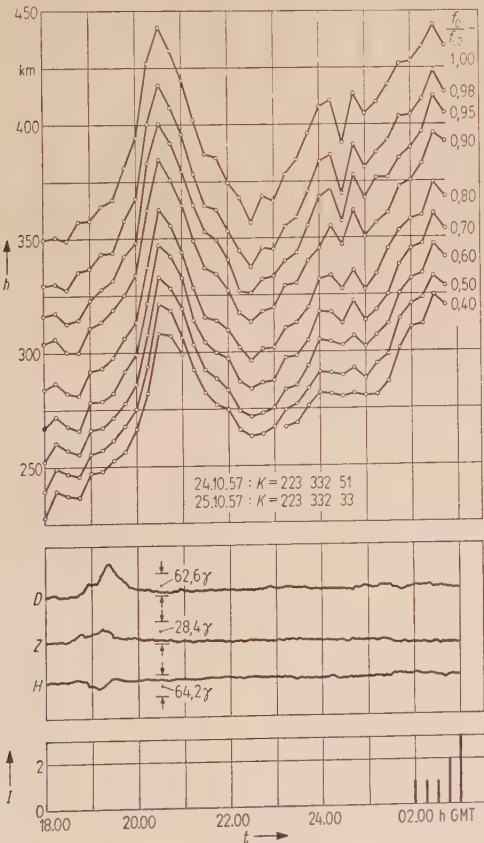


Bild 2. Höhenänderung der Schichtlinien der normalisierten Elektronendichteprofile der Nacht vom 24./25. Oktober 1957. f_0 Plasmafrequenz; f_{c0} F-Grenzfrequenz. Mit Z, D und H sind die Vertikal-, die Ost-West- und die Nord-Süd-Komponente des erdmagnetischen Feldes bezeichnet. I mißt die Intensität der F-Streuechos („spread-F“). Mit K sind die dreistündigen erdmagnetischen Kennziffern bezeichnet.

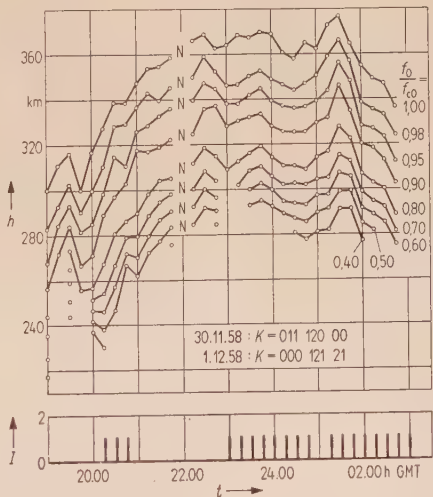


Bild 3. Höhenänderung der Schichtlinien der normalisierten Elektronendichteprofile der F-Schicht in der Nacht vom 30. November/1. Dezember 1958. Bezeichnungen wie bei Bild 2.

Die dreistündigen erdmagnetischen Kennziffern beider Tage, die uns freundlicherweise vom Geomagnetischen Observatorium Wingst zur Verfügung gestellt wurden, lassen diese Nacht als außergewöhnlich ruhig erkennen. Über 18 Stunden lang war $K = 0$. Der ausgeglichene Verlauf der Schichtlinien und auch deren Höhe entsprechen ganz den Erwartungen. Erstaunlich jedoch ist, daß F-Streuechos, wenn auch nur solche von geringer Intensität, beobachtet wurden. Die folgenden Bilder sollen zeigen, daß Elektronendichte-Profiländerungen die-

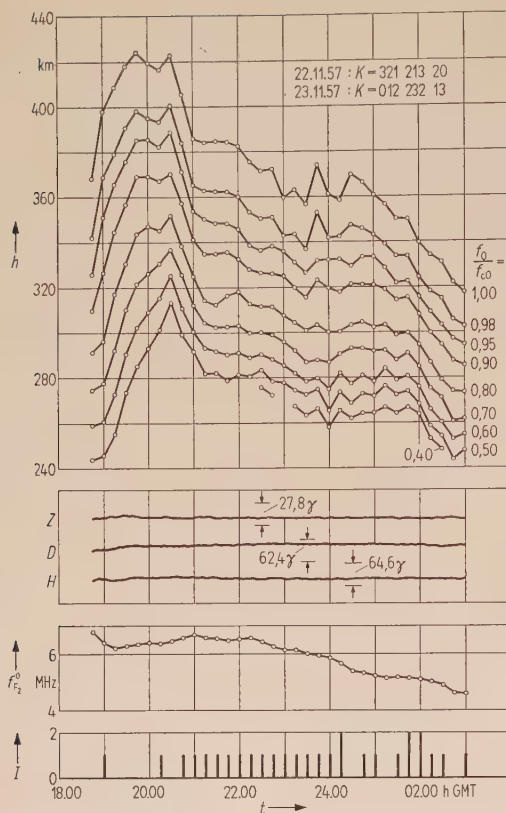


Bild 4. Höhenänderung der Schichtlinien der normalisierten Elektronendichteprofile der F-Schicht in der Nacht vom 22./23. November 1957. Bezeichnungen wie bei Bild 2.

ser Art eher eine Ausnahme als die Regel sind. Leider ist das bisher ausgewertete Beobachtungsmaterial noch zu knapp, um darüber schon statistische Angaben machen zu können.

Bild 4 repräsentiert gleichfalls eine Novembernacht (22./23. November 1957). Die erdmagnetischen Bedingungen waren zwar nicht ganz so ruhig wie in Bild 3 beschrieben; der Intensitätsverlauf der Z-, D- und H-Komponente zeigt aber, daß die geringe Unruhe nicht für die zweistündige Störung während der Abendstunden verantwortlich gemacht werden kann. Um 20 Uhr GMT lag nämlich das Maximum der F-Schicht um 70 km höher als am 30. November 1958. Während derselben Nacht wurden sogar Streuechos mittlerer Intensität beobachtet.

3.2. Höhenänderung der F-Schicht von Nacht zu Nacht

Nach den Bildern 3 und 4 scheint das Maximum der F-Schicht um Mitternacht in 365 ± 5 km Höhe zu liegen. Eine derartige geringe Streuung entspräche einer quasistatischen Vorstellung von der hohen Atmosphäre. Die Bilder 5 bis 7 sollen zeigen, daß dem nicht immer so ist.

In der Nacht vom 3./4. Januar 1958 war das erdmagnetische Feld sehr ruhig, wie die Kennziffern beider Tage erkennen lassen. Trotzdem, wenn man

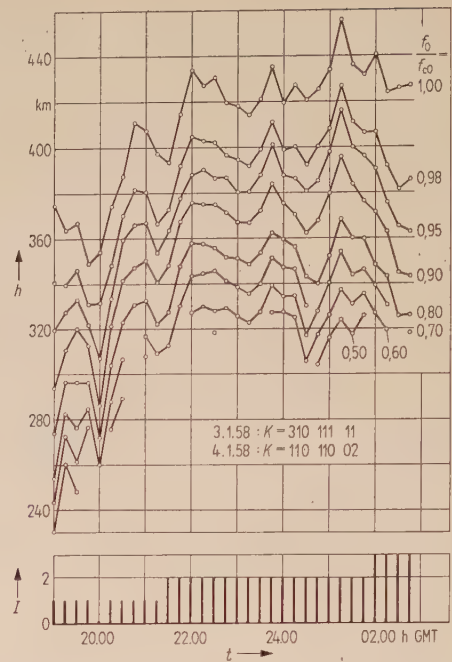


Bild 5. Höhenänderung der Schichtlinien der normalisierten Elektronendichteprofile der F-Schicht in der Nacht vom 3./4. Januar 1958. Bezeichnungen wie bei Bild 2.

so sagen darf, wurden F-Streuechos bis zu starker Intensität beobachtet und „trotzdem“ lagen die Schichtlinien um mindestens 60 km höher, als die Bilder 3 und 4 erwarten ließen. Bild 6 besagt, daß der mögliche Höhenbereich für das F-Schicht-Maximum an erdmagnetisch sehr ruhigen Nächten auch nach unten um etwa 60 km erweitert werden muß.

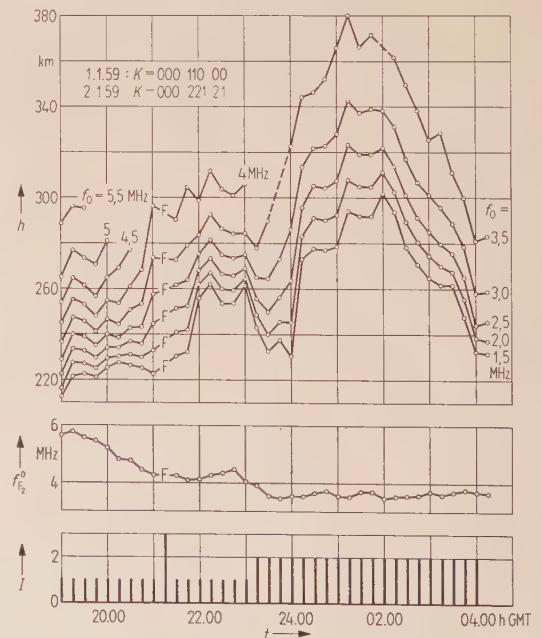


Bild 6. Höhenänderung der F-Schichtlinien konstanter Plasmafrequenz f_o in der Nacht vom 1./2. Januar 1959. Bezeichnungen wie bei Bild 2.

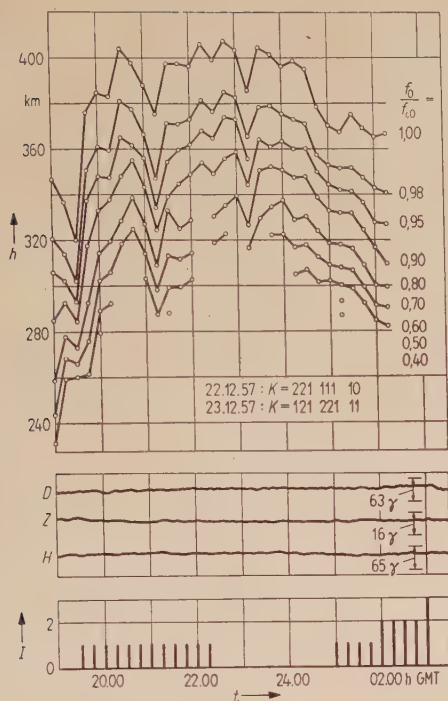


Bild 7. Höhenänderung der Schichtlinien der normalisierten Elektronendichteprofile der F-Schicht in der Nacht vom 22./23. Dezember 1957. Bezeichnungen wie bei Bild 2.

Bild 6 bestätigt, daß F-Streuechos mittlerer bis starker Intensität auftreten können und daß Schichthöhenänderungen sich keineswegs im Grenzfrequenzgang äußern müssen. Übrigens ist in Bild 6 nicht der Gang der Schichtlinien des normalisierten Profils der F-Schicht eingetragen, sondern die Änderung der Höhen gleicher Elektronendichte. Der Grund war die ungenaue Grenzfrequenzbestimmung infolge der Streureflexionen aus der F-Schicht. Bild 6 und insbesondere Bild 7 sollen außerdem zeigen, daß kurzzeitige Schichthöhenänderungen von etwa zwei Stunden Dauer unabhängig von der absoluten Höhe der Schicht auftreten können.

3.3. Jahreszeitliche Abhängigkeit der nächtlichen Höhenänderung der F-Schicht

Die bisherigen Bilder zeigten, daß die einzelnen Niveaulinien im wesentlichen parallel zueinander verlaufen. Aus diesem Grunde wurde die Schichtlinie $f_o/f_{co} = 1$ ausgewählt, um die jahreszeitliche Höhenabhängigkeit der F-Schicht an erdmagnetisch ruhigen Nächten übersichtlich darzustellen. Zu diesem Zweck wurde die erdmagnetisch ruhigste Nacht eines jeden Monats des Jahres 1957 ausgewertet. Die Bilder 8 und 9 bringen die Ergebnisse. Wie man sieht, unterschieden sich die Sommermonate am wenigsten und die Wintermonate am stärksten voneinander. Das ist verständlich, da Ende Juni die Sonne über Lindau in 176 km Höhe schon nicht mehr untergeht. Die eigentlichen optischen Sonnenauf- und -untergangsdaten über Lindau für das Jahr 1957 bringt Bild 10.

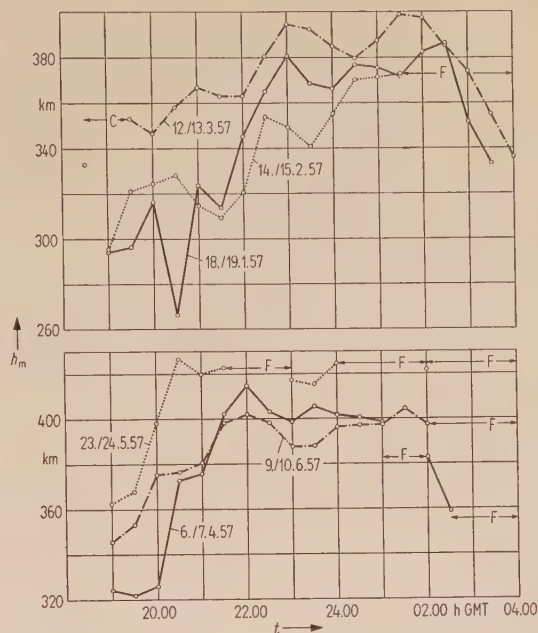


Bild 8. Höhenänderung des F-Schicht-Maximums während der jeweils erdmagnetisch ruhigsten Nacht eines jeden Monats des ersten Halbjahres 1957. „F“ bedeutet, daß eine genaue Höhenbestimmung wegen intensiver F-Streuechos nicht möglich war. C bedeutet Gerätestörung.

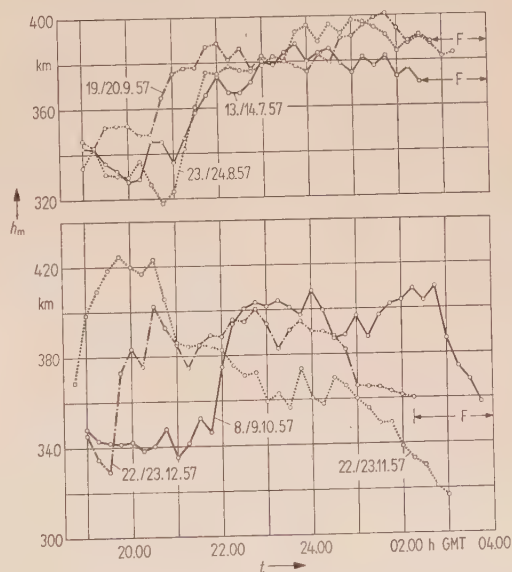


Bild 9. Höhenänderung des F-Schicht-Maximums während der jeweils erdmagnetisch ruhigsten Nacht eines jeden Monats des zweiten Halbjahres 1957. „F“ bedeutet, daß eine genaue Höhenbestimmung wegen intensiver F-Streuechos nicht möglich war.

Die Brechung in der Atmosphäre ist übrigens näherungsweise berücksichtigt. So wurden für optische Auf- und Untergänge in Höhen kleiner als 100 km $36'$ zum tatsächlichen Deklinationswinkel der Sonne addiert; für Höhen über 100 km $1^\circ 12'$.

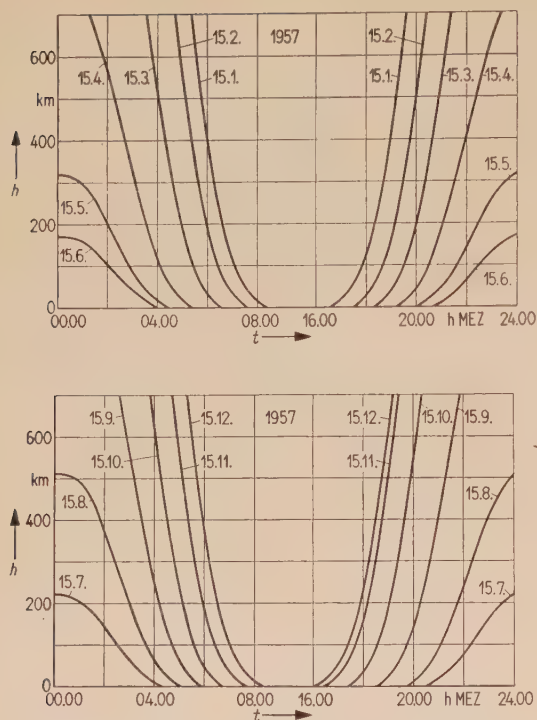


Bild 10. Optische Sonnenauf- und -untergangsdaten über Lindau/Harz für das Jahr 1957. Die Brechung in der Erdatmosphäre ist näherungsweise berücksichtigt.

3.4. Fehlende Korrelation der nächtlichen Höhenänderung der F-Schicht mit dem Sonnenstand

Die bisherigen Bilder zeigten, daß die Höhe der F-Schicht in den Abendstunden ansteigt und früh morgens wieder abfällt. Daß dieser Höhenanstieg und das Absinken nicht durch Abnahme bzw. Zunahme der Grenzfrequenz der F-Schicht vertauscht sind, macht Bild 11 besonders deutlich.

Bild 11 ist eine Umzeichnung von Bild 3. Hier ist die jeweilige Plasmafrequenz der Parameter der Kurven. Weiter sind mit eingezeichnet die Intensitäten I der F-Streuechos, der Grenzfrequenzgang der F-Schicht und die optischen Sonnenauf- und -untergangsdaten. Bild 3 wie Bild 11 zeigen ganz eindeutig, daß der Höhenanstieg lange nach Sonnenuntergang etwa um 20.00 h GMT erfolgt. Das Absinken findet lange vor Sonnenaufgang bei gleichbleibend niedriger Grenzfrequenz statt. Der Anstieg erfolgt relativ schnell und äußert sich in einer entsprechend schnellen Verminderung der Grenzfrequenzabnahme. Man beobachtet allerdings nicht das Gegenteil beim Absinken der F-Schicht in den frühen Morgenstunden. Das kann aber damit zusammenhängen, daß sich die Ionosphäre inzwischen soweit abgekühlt hat, daß der Anlagerungskoeffizient klein genug geworden ist. Spezielle Untersuchungen hierzu sollen noch angestellt werden.

Eine weitere Illustration dieses Sachverhalts mögen die Bilder 12 und 13 geben.

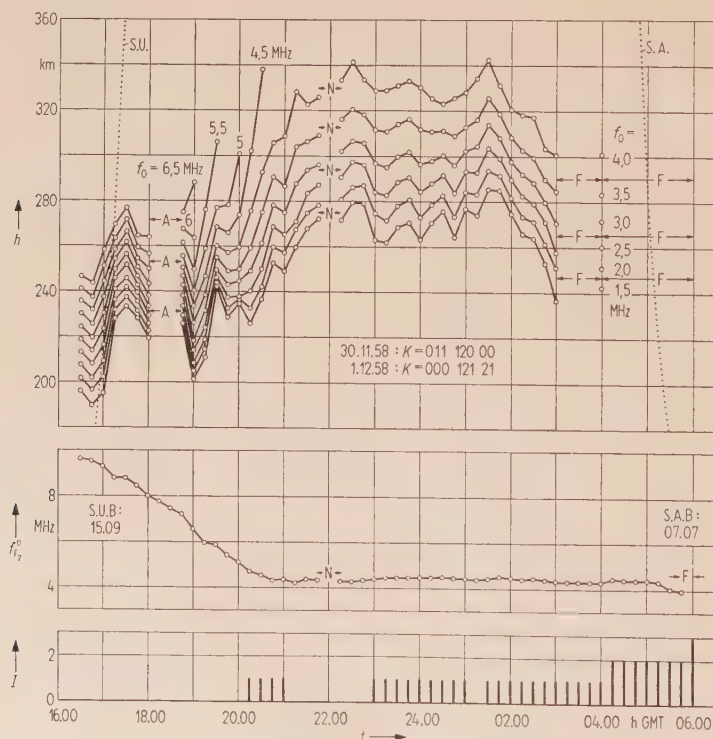


Bild 11. Änderung der Höhen konstanter Plasmafrequenz f_0 in der Nacht vom 30. November/1. Dezember 1958. f_F^0 , F-Grenzfrequenz, I Intensität der F-Streuechos („spread-F“). „F“ bedeutet, daß genaue Höhenbestimmungen wegen intensiver F-Streuechos nicht möglich waren. Die Sonnenauf- und -untergangsdaten sind punktiert eingezeichnet; für die Höhe $h = 0$ sind sie unter S.A.B bzw. S.U.B eingetragen.

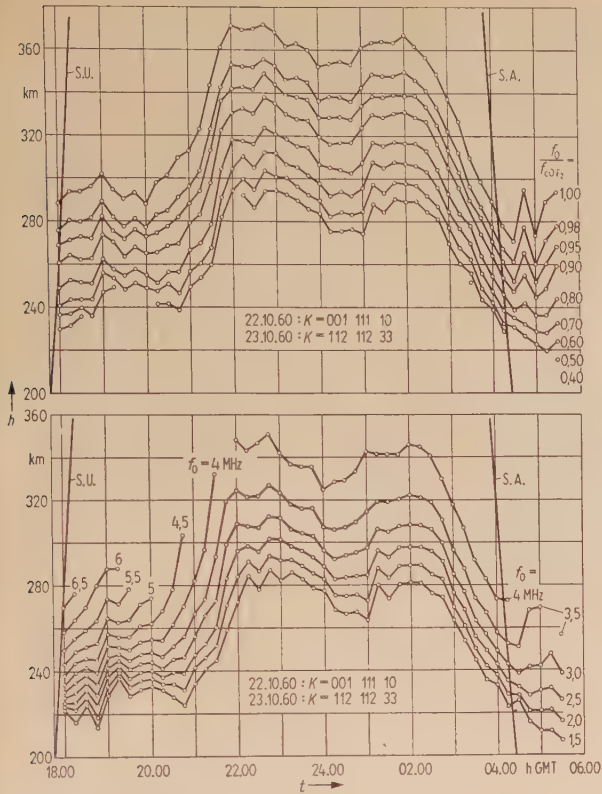


Bild 12. Änderung der Höhen konstanter Plasmafrequenz f_0 bzw. konstanter Verhältniswerte f_0/f_{0F_2} in der Nacht vom 22./23. Oktober 1960. f_{0F_2} Grenzfrequenz der F-Schicht. Unter S.A. bzw. S.U. sind die optischen Sonnenauf- bzw. -untergangsdaten eingetragen. Mit K sind die dreistündigen erdmagnetischen Kennziffern bezeichnet.

Bild 12 beschreibt den Zustand der Ionosphäre in der Nacht vom 22./23. Oktober 1960. Bild 13 ist eine entsprechende Darstellung für die Nacht vom 23./24. August 1957. Zusammen mit den Bildern 8 und 9 kann wohl folgende Feststellung gemacht werden:

Der nächtliche Höhenanstieg der F-Schicht und das Absinken dieser Schicht ist in keiner Weise mit dem Sonnenstand, Sonnenauf- bzw. Sonnenuntergang korreliert. Der Hub beträgt in den Sommermonaten etwa 40 km und im Winter ungefähr 70 km. Der Höhenanstieg erfolgt immer zwischen 20 und 21 h GMT. Ob es sich hier um eine Oszillation der F-Region handelt, soll noch untersucht werden.

4. Lokale Ausdehnung der vertikalen Bewegungsvorgänge in der nächtlichen Ionosphäre

Zwei weitere Echolotungsstationen, Ostenland 100 km westlich und Gedern 150 km südlich von Lindau, sollten mitentscheiden helfen, ob es sich bei den beschriebenen Bewegungsvorgängen um horizontal sich ausbreitende oder lokale Störungen handelt. Richtung und Entfernung der Feldstationen von Lindau wurde so gewählt, daß dieses Netz durch bereits vorhandene Stationen (Dourbes, Frei-

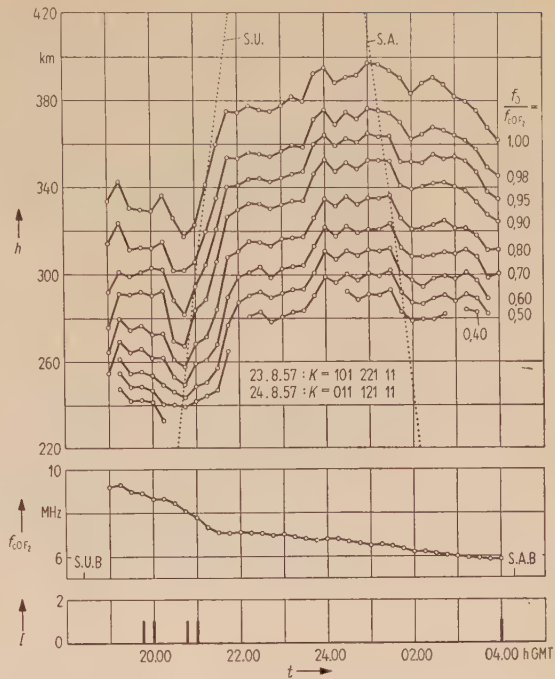


Bild 13. Höhenänderung der Schichtlinien der jeweils normalisierten F-Schicht-Elektronendichteprofile in der Nacht vom 23./24. August 1957. f_0 Plasmafrequenz, f_{0F_2} F-Grenzfrequenz, I Intensität der F-Streuechos („spread-F“). Die optischen Sonnenauf- (S.A.) bzw. Sonnenuntergangsdaten (S.U.) sind punktiert eingetragen; für $h = 0$ sind diese mit S.A.B bzw. S.U.B bezeichnet.

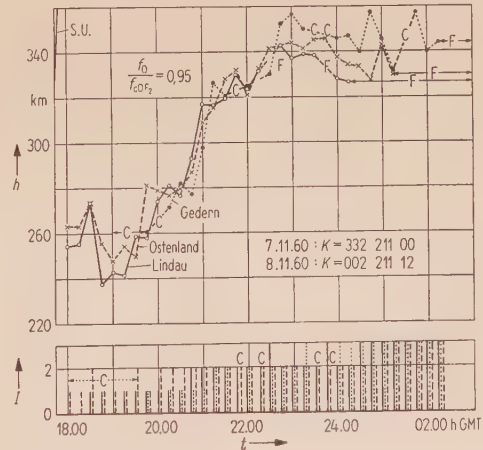


Bild 14. Höhenänderung der Schichtlinie $f_0/f_{0F_2} = 0,95$ des jeweils normalisierten F-Schichtprofils über den Stationen Lindau, Gedern und Ostenland in der Nacht vom 7./8. November 1960. f_0 Plasmafrequenz, f_{0F_2} F-Grenzfrequenz. Mit S.U. sind die optischen Sonnenuntergangsdaten und mit K die dreistündigen erdmagnetischen Kennziffern bezeichnet. I mißt die Intensität der F-Streuechos („spread-F“). Gerätestörungen sind unter C vermerkt.

burg) eventuell erweitert werden kann. Die Feldstationen wurden im Oktober 1960 in Betrieb genommen. Eine ganze Reihe von Nächten ist bereits ausgewertet.

Bild 14 möge als ein Beispiel für eine erdmagnetisch ruhige Nacht (7./8. November 1960) angesehen werden. Wie man sieht, wurden in der südlicheren Station Gedern Streureflexionen etwas später beobachtet als in Lindau oder Ostenland. Ab 21.30 h GMT war aber kaum mehr ein Unterschied festzustellen. Die teilweise starke Intensität dieser Echos verhinderte sehr genaue Höhenbestimmungen der Schichtlinie $f_0/f_{coF_2} = 0,95$. Trotzdem aber ist die Übereinstimmung recht gut. All das zuvor Gesagte gilt auch für eine schwach, 13./14. Oktober 1960, (Bild 15) und eine stark gestörte Nacht, 17./18. Oktober 1960, (Bild 16).

Beide Bilder lassen weder einen lokalen Unterschied noch eine zeitliche Versetzung erkennen. Die Auswertung der Stationen Dourbes, Slough und Freiburg bleibt darum abzuwarten, ehe eine Entscheidung über die lokale Ausdehnung der Störungen gefällt werden kann. Fest steht, daß die Ausdehnung der hier beschriebenen vertikalen Schichtbewegungen in einem Umkreis von etwa 150 km um Lindau praktisch gleichzeitig erfolgen. Gleiches gilt für das Auftreten von F-Streureflexionen.

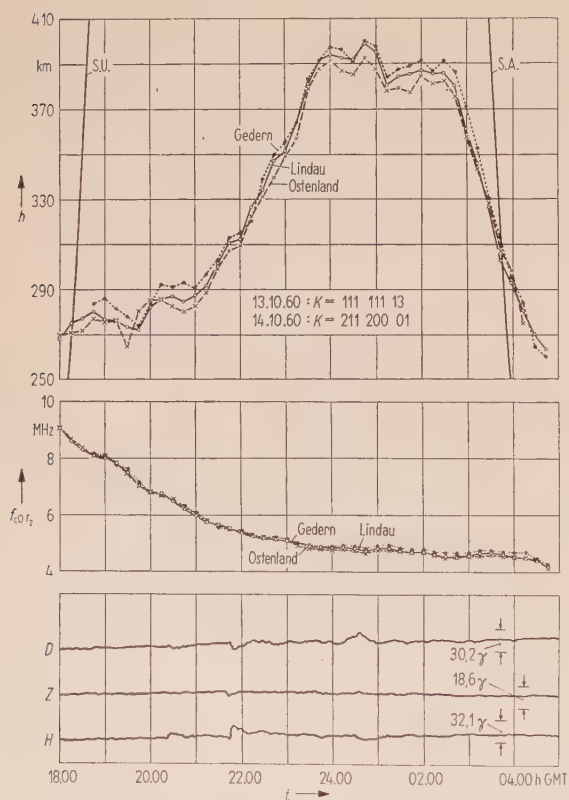


Bild 15. Höhenänderung der Schichtlinie $f_0/f_{coF_2} = 0,95$ des jeweils normalisierten F-Schichtprofils über den Stationen Lindau, Gedern und Ostenland in der Nacht vom 13./14. Oktober 1960. f_0 Plasmafrequenz, f_{coF_2} F-Grenzfrequenz. Unter S.A. bzw. S.U. sind die optischen Sonnenauf- und -untergangsdaten eingetragen. Mit Z, D und H sind die Vertikal-, die Ost-West- und die Nord-Süd-Komponente des erdmagnetischen Feldes bezeichnet. Unter K sind die dreistündigen erdmagnetischen Kennziffern vermerkt.

5. Vertikalbewegung der F-Schicht und das Auftreten von Streureflexionen aus der F-Schicht

Daß F-Streuechos in der Breite von Lindau ($51^{\circ}39'N$) bis zu starker Intensität selbst während erdmagnetisch äußerst ruhiger Nächte beobachtet werden können, haben insbesondere die Bilder 6 und 14 gezeigt. Diese Tatsache ist äußerst interessant; sie ist bisher offensichtlich übersehen worden, wahrscheinlich weil erdmagnetisch ruhige Nächte in unserer Breite sehr selten sind. Man muß daraus schließen, daß das äquatoriale „spread-F-Phänomen“ (fehlende Korrelation mit erdmagnetischen Störungen [12]) offenbar auch noch in unseren Breiten wirksam ist. Der polare Einfluß überwiegt allerdings in unserer Breite, d. h., wir beobachten meistens starke F-Streuechos an erdmagnetisch gestörten Nächten [13].

Die Bedeutung dieses „äquatorialen spread-F-Phänomens in unserer Breite“ ist aber auch deswegen interessant, weil es nicht mit außergewöhn-

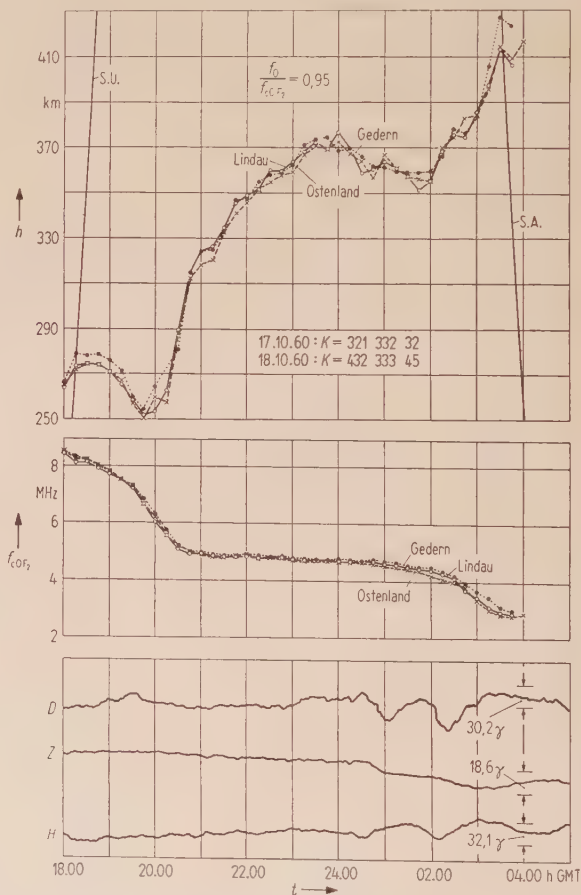


Bild 16. Höhenänderung der Schichtlinie $f_0/f_{coF_2} = 0,95$ des jeweils normalisierten F-Schichtprofils über den Stationen Lindau, Gedern und Ostenland in der Nacht vom 17./18. Oktober 1960. f_0 Plasmafrequenz, f_{coF_2} F-Grenzfrequenz. Unter S.A. bzw. S.U. sind die optischen Sonnenauf- bzw. -untergangsdaten eingetragen. Mit Z, D und H sind die Vertikal-, die Ost-West- und die Nord-Süd-Komponente des erdmagnetischen Feldes bezeichnet. Unter K sind die dreistündigen erdmagnetischen Kennziffern vermerkt.

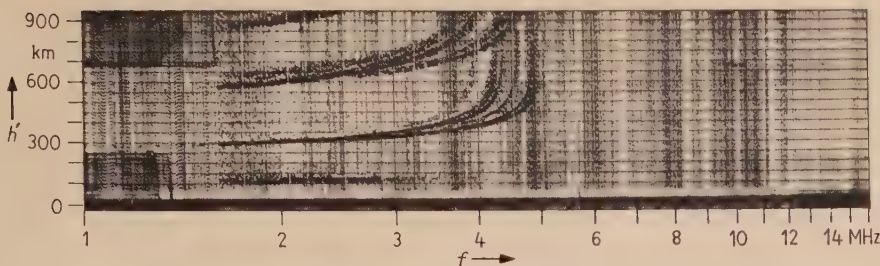


Bild 17. Echolotungsaufnahme der Ionosphäre veränderlicher Frequenz aufgenommen in Lindau/Harz am 30. November 1958 um 23.00 h GMT.

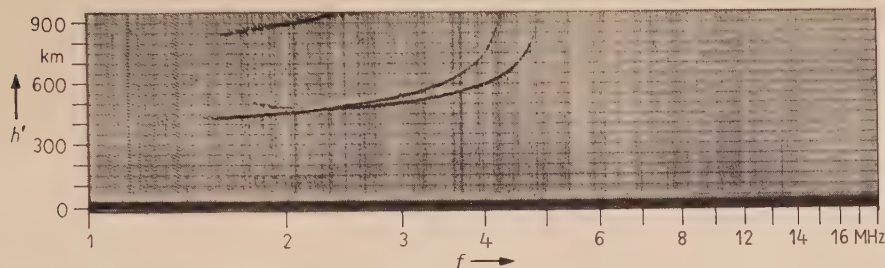


Bild 18. Echolotungsaufnahme der Ionosphäre veränderlicher Frequenz aufgenommen in Lindau/Harz am 2. Dezember 1958 um 23.00 h GMT.

lichen Vertikalbewegungen der F-Schicht gekoppelt ist. D. F. MARTIN [14] vertritt nämlich die Ansicht, daß starke Vertikalbewegungen der F-Schicht — allerdings in äquatorialen Breiten — instabile Bedingungen für die F-Schicht verursachen und damit schließlich die Möglichkeit für Streureflexionen schaffen würden. Tatsächlich beobachtet man in äquatorialen Breiten mit dem Auftreten der F-Streuechos auch einen Anstieg der F-Schicht [15].

Die Bilder 17 und 18 zeigen je ein Ionogramm dieser beiden Nächte. Im Gegensatz zur erdmagnetisch ungestörten Nacht ist das Ionogramm der gestörten Nacht, wie oben schon erwähnt, völlig frei von Streureflexionen. Die Intensität der Streureflexionen in Bild 18 ist mit $I = 1$ oder „gering“ in den Auswertebögen vermerkt. Dies möge ein Anhaltspunkt sein für die Intensitätsangaben $I = 3$ der F-Streureflexionen während einer anderen erdmagnetisch sehr ruhigen Novembernacht: 7./8. November 1960 (Bild 14).

G. G. BOWMAN [16], [17] berichtet über eine Zunahme der Intensität der F-Streuechos mit der scheinbaren Höhe der F-Schicht für Brisbane. Die wirklichen Höhen lassen für Lindau diesen Zusammenhang nicht erkennen. Das bisher ausgewertete Beobachtungsmaterial ist aber noch zu knapp, um quantitative Aussagen machen zu können.

Wie schon angedeutet, sollen insbesondere die Untersuchungen über die lokale Ausdehnung der Ionosphärenstörungen durch Zusammenarbeit mit weiteren Stationen ausgedehnt werden. Über die Höhenänderung der mittäglichen Ionosphäre sowie über Feinstruktur-Untersuchungen wird hier noch zu berichten sein.

Danken möchte ich meinen Mitarbeitern K. H. GEISWEID, H. G. FESSEL, K. OBERLÄNDER und

W. BARKE für die Ionogramme sowie Frl. U. GOLLMER und Frl. R. TETZLAFF für die Reduktion der scheinbaren Höhen in wahre Reflexionshöhen. Zu besonderem Dank verpflichtet bin ich den geomagnetischen Observatorien in Wingst und Göttingen für die dreistündigen Kennziffern bzw. Magnetogramme.

Schrifttum

- [1] JESSE, O., Untersuchungen über die sogenannten leuchtenden Nachtwolken. Sitz.-Ber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. 1890 und 1891.
- [2] HOFFMEISTER, C., „Die Meteore“, Leipzig 1937.
- [3] BECKER, W., Winde und turbulente Luftströmungen in der Ionosphäre. Arch. Meteor., Geoph. und Biokl. Ser. A: Meteor. u. Geoph. **6** [1954], 417—439.
- [4] BIBL, K., Phénomènes dynamiques dans les couches ionosphériques. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **235** [1952], 734—736.
- [5] BIBL, K. und RAWER, K., Travelling disturbances originating in the outer ionosphere. Agardograph Nr. 42, Paris 1959, S. 165—174.
- [6] KAMIYAMA, T., Ionospheric changes associated with geomagnetic bays. Sci. Rep. Tôhoku Univ. **7** [1956], 125—135.
- [7] BECKER, W., New methods and some results concerning true ionospheric height calculations. „Research Rep. EE 361“ of Cornell University, School of Electrical Engineering, Ithaca, New York, 30. Januar 1958.
- [8] BECKER, W., Die allgemeinen Verfahren der Station Lindau/Harz zur Bestimmung der wahren Verteilung der Elektronendichte in der Ionosphäre. A. E. Ü. **13** [1959], 373—382.
- [9] KOHL, H., Bewegungen der F-Schicht der Ionosphäre bei erdmagnetischen Störungen. A. E. Ü. **14** [1960], 169—176.
- [10] BECKER, W., Das Vergleichsverfahren der Station Lindau/Harz zur Bestimmung der wahren Verteilung der Elektronendichte in der Ionosphäre. A. E. Ü. **13** [1959], 49—57.
- [11] MARTYN, D. F., The morphology of ionospheric variations associated with magnetic disturbance. Proc. Roy. Soc. London (A) **218** [1953], 1—18.
- [12] KOTADIA, K. M., Spread-F in the ionosphere over Ahmedabad during the years 1954—1957. Proc. Ind. Acad. Sci. **1** [1959], 259—271.
- [13] SINGLETON, D. G., The geomorphology of spread-F. J. Geophys. Res. **65** [1960], 3615—3624.
- [14] MARTYN, D. F., Sporadic E-region ionization, „spread-F“, and the twinkling of radio stars. Nature **183** [1959], 1382—1383.
- [15] WRIGHT, R. W. H., Geomorphology of spread-F and characteristics of equatorial spread-F. J. Geophys. Res. **64** [1959], 2203—2207.
- [16] BOWMAN, G. G., Further studies of „spread-F“ at Brisbane — I: Experimental. Planet. Space Sci. **2** [1960], 133—149.
- [17] BOWMAN, G. G., Further studies of „spread-F“ at Brisbane — II: Interpretation. Planet. Space Sci. **2** [1960], 150—156.

Der Einfluß der Raumladung auf das Verhalten von Anlaufstromdioden

von HANS PÖTZL

Mitteilung aus dem Institut für Hochfrequenztechnik der Technischen Hochschule Wien

(A. E. Ü. 15 [1961], 578—586; eingegangen am 28. Juli 1961)

DK 621.385.23

Bei großen Sättigungsströmen und nicht zu kleinem Elektrodenabstand hat die Raumladung in Kathodennähe einen entscheidenden Einfluß auf das Verhalten von Anlaufstromdioden, während die Wirkung der Elektronen, die die Anode erreichen, meist vernachlässigt werden kann. Um den Einfluß der Raumladung in diesem Fall zu erfassen, wird eine Näherung verwendet, die sich auf die exakte Lösung des Problems für tiefe und für hohe Frequenzen stützt.

Zunächst wird aus der Gleichung von Liouville die Integralgleichung für die Wechselfeldstärke hergeleitet. Ein Reihenansatz nach Potenzen der Kreisfrequenz ermöglicht die Lösung für tiefe Frequenzen. Das Resultat, das sich als Debye-Abschirmung des Wechselfeldes in Kathodennähe interpretieren läßt, ermöglicht die Berechnung von Real- und Imaginärteil der elektronischen Admittanz bei tiefen Frequenzen. Im Grenzfall sehr hoher Frequenzen stehen Konvektionsstrom und Influenzstrom in induktivem Zusammenhang mit der Wechselfeldspannung. Auch für diesen Fall läßt sich die elektronische Admittanz berechnen.

Um eine Beschreibung der Admittanz für beliebige Frequenzen zu bekommen, wird ein Ersatzkreis verwendet, der die beiden Grenzfälle tiefer und hoher Frequenzen richtig beschreibt. Das Ergebnis wird sowohl mit der exakten Theorie des raumladungsfreien Falles als auch mit den bisher nicht erklärbaren Messungen von HENNINGS verglichen und zeigt in allen Fällen befriedigende Übereinstimmung.

With high saturation currents and an electrode spacing that is not too small the space charge near the cathode affects in a decisive manner the performance of initial-velocity current diodes, while the effect of electrons reaching the anode can be neglected as a rule. To take account of the influence of the space charge in this case, an approximation is used that is based on the exact solution of the problem for low and for high frequencies.

As a first step the integral equation for the ac field strength is derived from Liouville's equation. A series statement in terms of powers of the angular frequency allows the solution for low frequencies. The result which can be interpreted as a Debye shielding of the ac field near the cathode allows the calculation of the real and imaginary parts of the electronic admittance at low frequencies. In the limiting case of very high frequencies the convection current and the influence current are in an inductive relationship with the ac voltage. The electronic admittance can be calculated also for this case.

For a description of the admittance for arbitrary frequencies, an equivalent circuit is used which correctly describes the two limiting cases of low and high frequencies. The result is compared both with the exact theory of the space-charge-free case as with the so far not explainable measurements of HENNINGS and shows a satisfactory agreement in all cases.

1. Einleitung

Die Laufzeittheorie planparalleler Dioden, die im Exponentialgebiet (Anlaufstromgebiet) arbeiten, ist bisher für vernachlässigbare Raumladungskräfte entwickelt worden ([1], [2], [5], [6], [8], [10], [12]). Diese Vernachlässigung ist nur für genügend kleine Sättigungsströme und Elektrodenabstände gerechtfertigt. Diesem Umstand ist es zuzuschreiben, daß die Theorie experimentelle Ergebnisse, wie sie z. B. von HENNINGS [7] berichtet wurden, nicht erklären kann.

Die mathematische Formulierung einer Diodentheorie, die die Wirkung der Raumladungskräfte und die thermische Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen berücksichtigt, ist unter Heranziehung der Boltzmannschen Gleichung für die Teilchendichte im Phasenraum möglich (Dichtefunktionsmethode) [9]. Die Diodenadmittanzen konnten auf dieser Basis jedoch bisher nur für Spezialfälle mittels numerischer Integration berechnet werden [9]. Da einerseits ein Einblick in den Einfluß der verschiedenen Parameter notwendig ist, andererseits eine exakte Lösung des allgemeinen Problems kaum durchführbar erscheint, ist man auf die Einführung geeigneter Näherungen angewiesen.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß für die Theorie der Diode im Exponentialgebiet eine Näherung gute Ergebnisse liefert, die sich auf die *exakte* Lösung des Problems für *tiefe* und für *hohe* Frequenzen stützt. Ein ähnliches Verfahren wurde von SIEGMAN und BLOOM [11] angewendet, um den Rauschkonvektionsstrom im Potentialminimum einer raumladungsbegrenzten Diode zu bestimmen. Da sich die Methode in beiden Fällen gut bewährt, könnte sie von allgemeiner Bedeutung sein.

2. Die planparallele Anlaufstromdiode im stationären Fall

Bei Berücksichtigung der Raumladung darf die Ortsabhängigkeit der Feldstärke E_0 in der Anlaufstromdiode nicht vernachlässigt werden. Die normierte Feldstärke läßt sich unter Verwendung der von LANGMUIR eingeführten Parameter ξ , η in der Form [3], [13]

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{h^-(\eta) + \gamma^2},$$

$$h^-(\eta) = e^\eta [1 + \Phi(\sqrt{\eta})] - 1 - 2\sqrt{\eta/\pi} \quad (1)$$

schreiben (γ Integrationskonstante, Φ Gaußsche

Fehlerfunktion). Im folgenden wird eine andere Normierung bevorzugt, die die charakteristischen Größen der Kathode zugrunde legt (Sättigungsstrom J_s , Temperaturspannung $U_T = kT/e$ und Temperaturgeschwindigkeit $v_T = \sqrt{eU_T/m}$). Diese Größen bestimmen die Plasmakreisfrequenz in der Kathodenebene

$$\omega_s = \left(\frac{e J_s}{m \sigma \varepsilon_0 v_T} \right)^{1/2} (2\pi)^{1/4}. \quad (2)$$

Das normierte Potential ψ und der normierte Abstand ζ seien durch

$$\psi = -U_0/U_T, \quad \zeta = \omega_s z/v_T \quad (3)$$

definiert, wobei der Nullpunkt des Potentials U_0 in die Kathodenebene gelegt wird und z den Abstand von der Kathodenebene bezeichnet. In dieser Schreibweise erhält Gl. (1) die Form

$$\frac{d\psi}{d\zeta} = \left\{ e^{-\psi} [1 + \Phi(\sqrt{\psi_a - \psi})] + 2a^2 - e^{-\psi_a} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\psi_a - \psi} \right) \right\}^{1/2}, \quad (4)$$

wenn ψ_a den Wert von ψ an der Anode bezeichnet. Die Integrationskonstante a ist mit γ aus Gl. (1) durch

$$a^2 = \frac{1}{2} \gamma^2 e^{-\psi_a} \quad (5)$$

verknüpft.

Ein wichtiger Spezialfall liegt dann vor, wenn

$$a^2 \gg e^{-\psi_a} \quad (6)$$

ist. Physikalisch bedeutet diese Bedingung, daß der Einfluß jener Elektronen, die die Anodenebene erreichen, auf den Potentialverlauf in der Diode vernachlässigt werden kann. Die Bedingung (6) ist in einem großen Teil des Anlaufstromgebietes erfüllt. Nur in der Umgebung des Überganges zum raumladungsbegrenzten Betriebszustand ist die Ungleichung (6) verletzt.

Unter der Voraussetzung (6) kann man Gl. (4) vereinfachen und erhält die in elementarer Weise integrierbare Beziehung

$$\frac{d\psi}{d\zeta} = [2(a^2 + e^{-\psi})]^{1/2}, \quad (7)$$

aus der

$$a \zeta \sqrt{2} = \psi - 2 \ln \frac{(1 + a^2)^{1/2} + a}{(a^2 + e^{-\psi})^{1/2} + a} \quad (8)$$

folgt. Gl. (7) zeigt, daß eine starke Krümmung des Potentialverlaufes zufolge der Raumladung in der Nähe der Kathode

$$0 \leq \psi \lesssim \ln \frac{1}{a^2} \quad (9)$$

auftritt, während die Feldstärke in der übrigen Diode näherungsweise konstant ist, also keinen Einfluß der Raumladung auf den Feldverlauf zeigt.

3. Die Integralgleichung für die Wechselfeldstärke

Unter den in Vakuumröhren herrschenden Bedingungen kann man bei Anwendung schwacher

Wechselfelder von der Teilchennatur der Elektronen absehen. Die Wechselwirkung der Elektronen (kollektive Wechselwirkung) kann durch ein elektrisches Feld E beschrieben werden, dessen Quelle die stetige Raumladungsdichte ϱ ist. Für eindimensionale Verhältnisse gilt also

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E(z, t)}{\partial z} = \varrho(z, t). \quad (10)$$

Die Berücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilung erfordert die Zerlegung der Raumladungsdichte in die Beiträge aus verschiedenen Geschwindigkeitsklassen. Bezeichnet man mit $f(z, v, t) dz dv$ die Anzahl der Elektronen, die sich zur Zeit t zwischen den Strömungsquerschnitten z und $z + dz$ befinden und Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ haben, dann gilt für die Dichtefunktion $f(z, v, t)$ die Boltzmannsche Gleichung

$$\frac{\partial f(z, v, t)}{\partial t} + v \frac{\partial f(z, v, t)}{\partial z} - \frac{e}{m} E(z, t) \frac{\partial f(z, v, t)}{\partial v} = 0.$$

Raumladungsdichte $\varrho(z, t)$ und Konvektionsstrom $J(z, t)$ lassen sich aus $f(z, v, t)$ berechnen:

$$\varrho(z, t) = -e \int_{-\infty}^{\infty} f(z, v, t) dv, \quad (12)$$

$$J(z, t) = -\sigma e \int_{-\infty}^{\infty} v f(z, v, t) dv.$$

Gl. (10), (11) und (12) ermöglichen unter Annahme geeigneter Randbedingungen eine vollständige Beschreibung der Elektronenströmung.

Da wir uns auf die Behandlung kleiner Signale beschränken, kann Gl. (11) für den nichtstationären Fall mittels Störungsansatzes¹

$$f(z, v, t) = f_0(z, v) + f(z, v) e^{j\omega t} = f_0 + f e^{j\omega t}, \quad (13)$$

$$E(z, t) = E_0(z) + E(z) e^{j\omega t} = E_0 + E e^{j\omega t}, \quad (14)$$

$$\varrho(z, t) = \varrho_0(z) + \varrho(z) e^{j\omega t} = \varrho_0 + \varrho e^{j\omega t}, \quad (15)$$

$$J(z, t) = J_0(z) + J(z) e^{j\omega t} = J_0 + J e^{j\omega t} \quad (16)$$

linearisiert werden:

$$j\omega f + v \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{e}{m} E_0 \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{e}{m} E \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (17)$$

An Stelle von Gl. (10) benutzen wir die Beziehung, nach der sich der ortsunabhängige Gesamtstrom I aus Verschiebungsstrom und Konvektionsstrom zusammensetzt

$$I - j\omega \sigma \varepsilon_0 E = -e \sigma \int_{-\infty}^{\infty} v f dv. \quad (18)$$

Neben Gl. (3) führen wir noch die Normierungen

$$F = \frac{eE}{m\omega_s v_T}, \quad g = \frac{\sigma e v_T^2}{J_s} f, \quad \frac{\omega}{\omega_s} = \Omega_s, \quad \frac{v}{v_T} = w \quad (19)$$

ein. Damit erhalten die Gl. (17) und (18) mit dem normierten Potential ψ als unabhängige Variable

¹ Zur Kennzeichnung der Funktionen, die von der Zeit abhängen, werden diese mit den zugehörigen unabhängigen Variablen aufgeschrieben, während bei zeitunabhängigen Funktionen die unabhängigen Variablen im folgenden nicht mehr angeschrieben werden.

an Stelle von z die Form

$$j\Omega_s g + \frac{d\psi}{d\zeta} \left(w \frac{\partial g}{\partial \psi} - \frac{\partial g}{\partial w} \right) = F \frac{\partial g_0}{\partial w}, \quad (20)$$

$$\frac{I}{J_s} = j\Omega_s \sqrt{2\pi} F - \int_{-\infty}^{\infty} w g(\psi, w) dw. \quad (21)$$

Im Anhang wird g aus Gl. (20) unter Berücksichtigung der Randbedingungen ermittelt und in Gl. (21) eingesetzt. Dabei wird der Einfluß jener Elektronen, die die Anode erreichen, vernachlässigt. Es ergibt sich für die normierte Wechselfeldstärke F die Integralgleichung

$$\begin{aligned} \frac{I}{J_s} - j\Omega_s \sqrt{2\pi} F(\psi) &= \frac{J(\psi)}{J_s} = \\ &= \sqrt{2} j \int_0^\psi \frac{F(y) dy}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} \int_\psi^\infty dq e^{-q} e^{-j\Omega_s \tau(y, q)} \times \\ &\quad \times \sin[\Omega_s \tau(\psi, q)] + \\ &+ \sqrt{2} j \int_\psi^\infty \frac{F(y) dy}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} \int_y^\infty dq e^{-q} e^{-j\Omega_s \tau(\psi, q)} \times \\ &\quad \times \sin[\Omega_s \tau(y, q)]. \end{aligned} \quad (22)$$

$J(\psi)$ bedeutet den Wechselkonvektionsstrom in einer Ebene mit dem normierten Potential ψ . Die Größe $\tau(y, q)$ ist die normierte Laufzeit, die ein Elektron, das an der Kathode die normierte Austrittsgeschwindigkeit $w = \sqrt{2q}$ hat, benötigt, um den Weg zwischen den Ebenen $\psi = y$ und $\psi = q$ zurückzulegen. In der Ebene $\psi = q$ hat dieses Elektron die Geschwindigkeit Null, beginnt also seinen Rückweg zur Kathode. Diese normierte Laufzeit ist durch

$$\tau(y, q) = \frac{1}{2} \int_y^q d\psi [(a^2 + e^{-\psi})(q - \psi)]^{-1/2} \quad (23)$$

gegeben. Die Laufzeit selbst ist τ/ω_s und daher der Laufwinkel $\Omega_s \tau$.

Das Analogon zu Gl. (22) wurde für den komplizierteren Fall der Raumladungsdioden von PAUCKSCH [9] abgeleitet und bildet dort den Ausgangspunkt der numerischen Integration für ein Zahlenbeispiel. Wir werden zeigen, daß sich, für den einfacheren Fall der Anlaufstromdiode, ausgehend von Gl. (22), ein Näherungsverfahren entwickeln läßt, das zu übersichtlichen und allgemeinen Resultaten führt. Diese Ergebnisse sind zwar nur näherungsweise gültig, geben jedoch einen guten Einblick in die Abhängigkeit der elektronischen Admittanz von den verschiedenen Parametern.

4. Näherungsmethode für tiefe Frequenzen

Im folgenden Abschnitt beschränken wir uns auf den Fall, bei dem die Elektronen mit kleinem Laufwinkel die Vorgänge in der Diode bestimmen. Dieser Fall wird für nicht zu hohe Frequenzen und genügend große Werte von ψ_a auftreten.

Die Lösungsmethode besteht in einer Reihenentwicklung der normierten Wechselfeldstärke F in eine Potenzreihe von Ω_s :

$$F(\psi) = \frac{1}{j\Omega_s \sqrt{2\pi} J_s} [G(\psi) - j\Omega_s H(\psi) + \dots]. \quad (24)$$

Mit dem Ansatz Gl. (24) erhält man durch Entwicklung der Integralgleichung (22) nach Potenzen von Ω_s die folgenden Integralgleichungen für G und H :

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} [1 - G(\psi)] &= \int_0^\psi \frac{G(y) dy}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} \int_\psi^\infty dq e^{-q} \tau(\psi, q) + \\ &+ \int_\psi^\infty \frac{G(y) dy}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} \int_y^\infty dq e^{-q} \tau(y, q), \\ \sqrt{\pi} H(\psi) &+ \int_0^\psi \frac{H(y) dy}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} \int_\psi^\infty dq e^{-q} \tau(\psi, q) + \\ &+ \int_\psi^\infty \frac{H(y) dy}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} \int_y^\infty dq e^{-q} \tau(y, q) = \\ &= - \int_0^\psi \frac{G(y) dy}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} \int_\psi^\infty dq e^{-q} \tau(\psi, q) \tau(y, q) - \\ &- \int_\psi^\infty \frac{G(y) dy}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} \int_y^\infty dq e^{-q} \tau(\psi, q) \tau(y, q) = \\ &= -\sqrt{\pi} \Psi(\psi). \end{aligned} \quad (25)$$

Gl. (25) läßt sich, wie im Anhang gezeigt wird, in geschlossener Form lösen und ergibt

$$G(\psi) = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + e^{-\psi}} - \frac{e^{-\psi}}{a \sqrt{a^2 + 1} \sqrt{2}} [\sqrt{2} + \zeta(\psi)]. \quad (27)$$

Aus dieser Beziehung für die normierte Wechselfeldstärke bei tiefen Frequenzen lassen sich interessante Folgerungen ziehen. Die normierte Feldstärke an der Kathode

$$G(0) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad (28)$$

hängt nur vom Parameter a ab. Ist a groß gegen eins, dann stimmt $G(0)$ mit $G(\infty) = 1$ überein und man sieht leicht ein, daß die Feldstärke in der ganzen Diode konstant ist. Für $a = 1$ hat die Feldstärke an der Kathode noch immer mehr als 70% ihres Wertes an der Anode (letzter ist im Rahmen unserer Voraussetzungen mit $G(\infty)$ identisch). Wird a jedoch kleiner als eins, dann sinkt $G(0)$ etwa proportional zu a . Mit Hilfe von Gl. (8) läßt sich zeigen, daß die Abschätzungen

$$G \approx \frac{2}{3} a e^{\psi/2} \quad \text{für} \quad e^{-\psi} > a^2 \quad (29)$$

und

$$G \approx 1 \quad \text{für} \quad e^{-\psi} < a^2 \quad (30)$$

die wesentlichen Züge des Feldstärkenverlaufes wiedergeben (selbstverständlich ist G für $a^2 = e^{-\psi}$ stetig und die Abweichung um etwa 30% zwischen

den Werten aus Gl. (29), (30) eine Folge der Ungenauigkeit der Abschätzungen in der Umgebung von $a^2 = e^{-\psi}$. Im „Kathodenbereich“ wächst die Feldstärke nach Gl. (29) mit der Entfernung von der Kathode, während sie im „Anodenbereich“ nahezu konstant ist.

Zur Erklärung sei darauf hingewiesen, daß sich die Elektronen in solcher Weise bewegen, daß sie durch ihre Raumladungskräfte das Wechselfeld schwächen. Im Kathodenbereich sind genügend Elektronen vorhanden, um das Wechselfeld nahezu völlig zu unterdrücken. Der Gesamtstrom fließt nahezu als reiner Konvektionsstrom. Im Anodenbereich reicht die schwache Raumladung nicht zu einer nennenswerten Beeinflussung des Wechselfeldes aus. Die Schwächung des Wechselfeldes im Kathodenbereich ist also eine Debye-Abschirmung unter dem Einfluß eines elektrischen Gleichfeldes². An der Grenze zwischen Kathoden- und Anodenbereich, die durch $e^{-\psi} \approx a^2$ gekennzeichnet ist, wandelt sich der Konvektionsstrom in einen Verschiebungsstrom um.

Vergößert man die Feldstärke, d. h. den Parameter a , dann wird der Kathodenbereich kleiner und verschwindet schließlich. Das bedeutet, daß die Debye-Abschirmung durch die Gleichfeldstärke unterdrückt wurde. Man erkennt aus Gl. (27), daß die Abschirmung dann und nur dann verschwindet, wenn der Einfluß der Raumladungsdichte auf den Verlauf der Gleichfeldstärke vernachlässigt werden kann ($a \gg 1$).

Der Verlauf der Wechselfeldstärke nach Gl. (27) erklärt nur die Blindkomponente der elektronischen Admittanz. Bei sehr kleinen Frequenzen ist keine Dämpfung durch die Elektronen vorhanden, solange der Anodengleichstrom vernachlässigt werden kann. Die Dämpfung ist ein Effekt zweiter Ordnung in der Frequenz und kann daher nur aus der Funktion $H(\psi)$ berechnet werden. Da $G(\psi)$ nach Gl. (27) bekannt ist, kann die Funktion $\Psi(\psi)$ in Gl. (26) bestimmt werden. Somit muß Gl. (26) nach $H(\psi)$ aufgelöst werden. Das Resultat der im Anhang durchgeführten Rechnung lautet:

$$H(\psi) = G(\psi) \int_{\psi}^{\infty} dy \frac{d\Psi(y)}{dy} \frac{\sqrt{a^2 + e^{-y}}}{a} + e^{-\psi} \int_0^{\psi} dy \frac{d\Psi(y)}{dy} e^y \left[G(y) \frac{\sqrt{a^2 + e^{-y}}}{a} - 1 \right]. \quad (31)$$

Um die Theorie mit dem Experiment vergleichen zu können, ist es notwendig, das Integral

$$\int_0^{\infty} dy H(y) (a^2 + e^{-y})^{-1/2}$$

auszuwerten. Dieses Integral wird im Anhang auf die Form

$$\int_0^{\infty} \frac{H(\psi) d\psi}{\sqrt{a^2 + e^{-\psi}}} = - \frac{r(a)}{\sqrt{\pi} a^2} \quad (32)$$

² Die Bedeutung der Debye-Abschirmung für das Diodenproblem hat als erster J. BERGHAMMER hervorgehoben.

gebracht. Die Funktion $r(a)$, die nur positive Werte annimmt, ist definiert durch

$$r(a) = a^4 \int_0^{\infty} dq e^{-q} \left[\int_0^q dy \sqrt{y} (a^2 + e^{y-q})^{-3/2} \right]^2. \quad (33)$$

Sie kann nicht auf bekannte Funktionen zurückgeführt werden und mußte daher numerisch ausgewertet werden. Das Resultat zeigt Bild 1. Im Grenzfall $a^2 \gg 1$ läßt sich $r(a)$ berechnen:

$$r(a) \approx \frac{8}{3a^2}. \quad (34)$$

Gl. (32) wird die Berechnung der elektronischen Dämpfung in der Anlaufstromdiode bei tiefen Frequenzen ermöglichen.

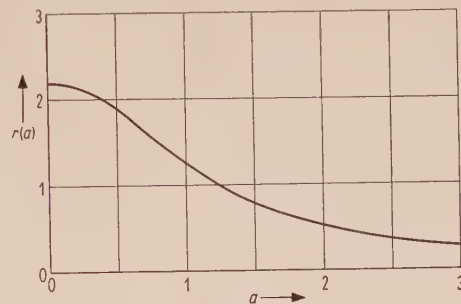


Bild 1. Die normierte Widerstandsfunktion $r(a)$.

5. Diodenadmittanz bei tiefen Frequenzen

Nach den Gl. (22) und (24) ist der Konvektionsstrom J durch

$$\frac{J}{I} = 1 - G(\psi) + j\Omega_s H(\psi) \quad (35)$$

gegeben. Der durch die Elektronen im Außenkreis induzierte Strom ist

$$J_{\text{infl}} = \frac{1}{d} \int_0^d J dz = \frac{1}{d} \int_0^{\infty} J dz. \quad (36)$$

Setzt man Gl. (35) unter Berücksichtigung von Gl. (27) und (32) in Gl. (36) ein, dann erhält man

$$\frac{J_{\text{infl}}}{I} = \frac{\sqrt{2}}{\zeta_a} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} - \frac{j\Omega_s}{2\sqrt{\pi}} \frac{r(a)}{a^2} \right]. \quad (37)$$

Für die elektronische Admittanz ergibt sich somit

$$Y_e = \frac{1}{d} \frac{\int_0^d J dz}{\int_0^d E dz} = j\omega C_0 \frac{J_{\text{infl}}}{I} \left(1 - \frac{J_{\text{infl}}}{I} \right)^{-1}, \quad (38)$$

wobei C_0 die Kaltkapazität $\epsilon_0 \sigma / d$ ist. Um dieses Resultat zu diskutieren, betrachten wir zunächst den Fall vernachlässigbarer Raumladung ($a^2 \gg 1$). Da für diesen Fall J_{infl}/I gegen eins vernachlässigt werden kann, ist der zweite Faktor auf der rechten Seite von Gl. (38) gleich eins. Der Potentialverlauf ist näherungsweise linear und es gilt nach Gl. (7)

$$\psi_a = a \zeta_a \sqrt{2}. \quad (39)$$

Mit den Gl. (37) und (39) erhält man aus Gl. (38)

$$Y_e = \frac{J_s}{U_T} \psi_a^{-2} \left[2 \sqrt{\pi} j \left(\frac{\omega d \sqrt{2}}{v_T \psi_a} \right) + \frac{16}{3} \left(\frac{\omega d \sqrt{2}}{v_T \psi_a} \right)^2 \right], \quad (40)$$

wobei ζ_a gemäß Gl. (3) durch $\omega_s d / v_T$ ersetzt wurde. Der Ausdruck in den eckigen Klammern von Gl. (40) entspricht der von GUNDLACH [6] eingeführten Funktion Y_7 . Der Ausdruck in der runden Klammer wurde von GUNDLACH mit α_T bezeichnet. Man überzeugt sich leicht, daß das Ergebnis Gl. (40) tatsächlich den Grenzwert von Y_7 für tiefe Frequenzen darstellt.

6. Grenzfall sehr hoher Frequenzen

Für sehr hohe Frequenzen können die Raumladungskräfte vernachlässigt werden. Dieser Fall ist deshalb besonders einfach, weil das Verhalten der Elektronen nicht von ihrer „Vorgeschichte“ abhängt. Daher treten an Stelle komplizierter Integro-Differentialgleichungen gewöhnliche Differentialgleichungen auf. Der Konvektionsstrom kann gegen den Verschiebungsstrom vernachlässigt werden, so daß die Wechselfeldstärke in der gesamten Diode konstant angenommen werden kann. Es gibt bei extrem hohen Frequenzen keine Debye-Abschirmung.

Da der zweite und dritte Term auf der linken Seite von Gl. (17) gegen den ersten vernachlässigt werden kann, erhält man für die Dichtefunktion unmittelbar

$$j\omega f = \frac{e}{m} E \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (41)$$

Dieselbe Näherung wurde von SIEGMAN und BLOOM [11] zur Berechnung des Rauschstromes im Potentialminimum bei sehr hohen Frequenzen verwendet. Durch Integration von Gl. (41) ergibt sich der Wechselkonvektionsstrom

$$J = \frac{-\frac{e}{m} \varrho_0 \sigma}{j\omega} E = \frac{\omega_p^2}{j\omega} \sigma \varepsilon_0 E. \quad (42)$$

Der Konvektionsstrom hängt nur mehr von der Feldstärke in der betrachteten Ebene ab; es ist also eine „lokale“ Beschreibung der Elektronenströmung möglich. Da die Wechselfeldstärke E in der Diode konstant angenommen wurde, ist die Wechselspannung durch $U = Ed$ gegeben, so daß Gl. (42) in der Form

$$J = \frac{\omega_p^2 C_0}{j\omega} U = \frac{U}{j\omega L_k}, \quad (43)$$

$$L_k = \frac{1}{\omega_p^2 C_0} = \frac{d}{\frac{e}{m} (-\varrho_0) \sigma}$$

geschrieben werden kann. (Der Index k bezieht sich auf „Konvektionsstrom“.) Diese Induktivität wurde von SIEGMAN und BLOOM eingeführt.

In einem ähnlichen Zusammenhang steht der Influenzstrom mit der angelegten Spannung. Die zugehörige Induktivität hängt jedoch vom Mittel-

wert der Plasmafrequenz (Raumladungsdichte) ab. Durch Integration von Gl. (43) erhält man

$$J_{\text{infl}} = \frac{C_0}{j\omega} \left(\frac{1}{d} \int_0^d \omega_p^2 dz \right) U, \quad L_1 = \left(C_0 \int_0^d \omega_p^2 \frac{dz}{d} \right)^{-1}. \quad (44)$$

Der Grenzwert der elektronischen Admittanz für sehr hohe Frequenzen ist daher

$$Y_e = \frac{1}{j\omega L_1}. \quad (45)$$

Der Ersatzkreis für die Admittanz der Diode im betrachteten Grenzfall besteht aus der Parallelschaltung der Induktivität L_1 mit der Kaltkapazität C_0 .

7. Der allgemeine Ersatzkreis

Der Rauschkonvektionsstrom im Potentialminimum einer raumladungsbegrenzten Diode wurde erfolgreich durch einen Ersatzkreis [11] beschrieben. Dieser basiert auf der Behandlung der Grenzfälle sehr tiefer und sehr hoher Frequenzen und auf den zugehörigen Ersatzkreisen. Es kann angenommen werden, daß die physikalische Ursache für das Auftreten der Schaltelemente in diesen beiden Kreisen bei allen Frequenzen wirksam ist und es erscheint daher aussichtsreich, eine näherungsweise Beschreibung der Diode für beliebige Frequenzen durch Kombination der beiden Ersatzkreise zu versuchen. Wir beschränken uns dabei auf den Fall, in dem der Einfluß der Transelektronen vernachlässigt werden kann. Der Weg zur Auffindung des Kreises ähnelt der Ableitung einer äquivalenten Schaltung für die Llewellyndiode von DRAGANESCU [4].

Die Elektronen in der Anodenregion haben auf das Wechselstromverhalten der Diode keinen Einfluß, da der Gesamtstrom in diesem Bereich als reiner Verschiebungsstrom fließt. Daher ist der Anodenbereich durch eine Kapazität C_2 darzustellen. Die Kapazität C_1 der Kathodenregion ist bei tiefen Frequenzen durch den Konvektionsstrom nahezu kurzgeschlossen. Es scheint naheliegend, diese Verhältnisse durch die Parallelschaltung eines Widerstandes R_2 zur Kapazität C_1 darzustellen. Bei hohen Frequenzen verschwindet der die Debye-Abschirmung ausdrückende Widerstand und der Konvektionsstrom steht in induktivem Zusammenhang mit der angelegten Spannung. Dies kann durch die Serienschaltung einer Induktivität L_2 mit dem Widerstand R_2 zum Ausdruck gebracht werden. Daher wird der in Bild 2 dargestellte Ersatzkreis zur allgemeinen Beschreibung der Diodenadmittanz vorgeschlagen. Die vier Elemente des Ersatzkreises lassen sich aus den Resultaten für tiefe und hohe Frequenzen bestimmen. Auf Grund der

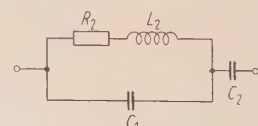


Bild 2. Der Ersatzkreis für die Admittanz der Anlaufstromdiode.

Bedeutung von C_1 und C_2 ist es klar, daß ihre Serienschaltung die Kaltkapazität der Diode ergeben muß:

$$\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = C_0. \quad (46)$$

Zieht man von der Admittanz des Ersatzkreises nach Bild 2 die Kaltkapazität ab, dann stellt der entstehende Ausdruck die elektronische Admittanz dar. Man findet

$$Y_e = j\omega C_0 \frac{C_2}{C_1} \times \\ \times [1 - \omega^2 L_2 (C_1 + C_2) + j\omega R_2 (C_1 + C_2)]^{-1}. \quad (47)$$

Im Grenzfall tiefer Frequenzen muß dieser Ausdruck in Gl. (38) übergehen, wenn man in die letztere Gleichung die Gl. (37) einsetzt. Für den Grenzfall sehr hoher Frequenzen finden wir aus den Gl. (45) und (44) unter Berücksichtigung der Gleichstromverhältnisse

$$\varrho_0 = -\frac{J_s \sqrt{2\pi}}{\sigma v_T} e^{-\psi}, \quad \omega_p = \omega_s e^{-\psi/2} \quad (48)$$

die Formel

$$Y_e = \frac{\omega_s C_0 \sqrt{2}}{j\Omega_s \zeta_a} (\sqrt{a^2 + 1} - a), \quad (49)$$

in die auch Gl. (47) für hohe Frequenzen übergehen muß. Aus diesen Betrachtungen lassen sich die Elemente des Ersatzkreises bestimmen und man erhält

$$\frac{C_0}{C_1} = \frac{\sqrt{2}}{\zeta_a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \right), \\ \omega_s R_2 C_0 = \frac{1}{\zeta_a \sqrt{2\pi}} \frac{r(a)}{a^2}, \quad (50) \\ \omega_s^2 L_2 C_0 = \frac{\sqrt{2}}{\zeta_a} \frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{a^2 (1 + a^2)}.$$

Die elektronische Admittanz kann mit diesen Ausdrücken geschrieben werden:

$$Y_e = j\omega C_0 \frac{C_0^2}{C_1^2} \left[\frac{C_0}{C_1} \left(1 - \frac{C_0}{C_1} \right) + j\Omega_s (\omega_s R_2 C_0) - \Omega_s^2 (\omega_s^2 L_2 C_0) \right]^{-1}.$$

Dieses Ergebnis wird zunächst durch Betrachtung des raumladungsfreien Falles geprüft. Für $a \gg 1$ erhält man

$$Y_e = \frac{j\omega C_0}{\sqrt{2} \zeta_a a^3} \left(1 + j \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Omega_s}{a} - \frac{\Omega_s^2}{a^2} \right)^{-1}. \quad (52)$$

Setzt man a nach Gl. (39) ein, dann erhält man für

$$\frac{\Omega_s}{a} = \frac{\omega}{\omega_s} \frac{\sqrt{2} \zeta_a}{\psi_a} = \frac{\omega d \sqrt{2}}{v_T \psi_a} = \alpha_T \quad (53)$$

und somit für die elektronische Admittanz

$$Y_e = \frac{J_s}{U_T} \frac{1}{\psi_a^2} \frac{2j\alpha_T \sqrt{\pi}}{1 + 8j\alpha_T / 3\sqrt{\pi} - \alpha_T^2}. \quad (54)$$

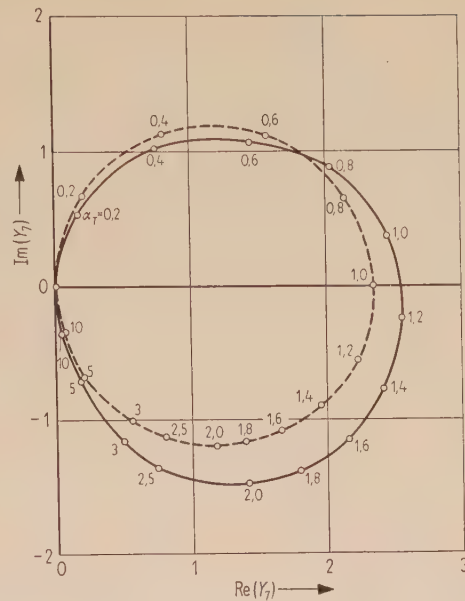


Bild 3. Die Funktion $Y_7(\alpha_T)$ nach GUNDLACH [6] (—) und nach der Ersatzkreistheorie (---).

Das exakte Ergebnis von GUNDLACH [6] lautet

$$Y_e = \frac{J_s}{U_T} \frac{1}{\psi_a^2} Y_7(\alpha_T). \quad (55)$$

Beide Ergebnisse werden in Bild 3 verglichen. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung des aus dem Ersatzkreis gewonnenen Resultats mit dem exakten Ergebnis, obwohl der mathematische Aufbau der Formeln in beiden Fällen völlig verschieden ist. Obwohl unsere Berechnung auf der Annahme starker Raumlading im Kathodenbereich beruhte, ist das Ergebnis auch für vernachlässigbare Raumlading und für beliebige Werte des Parameters α_T richtig.

Die Bilder 4 bis 8 zeigen den Vergleich unserer theoretischen Ergebnisse mit den umfangreichen Messungen von HENNINGS [7]. Die Bilder beweisen,

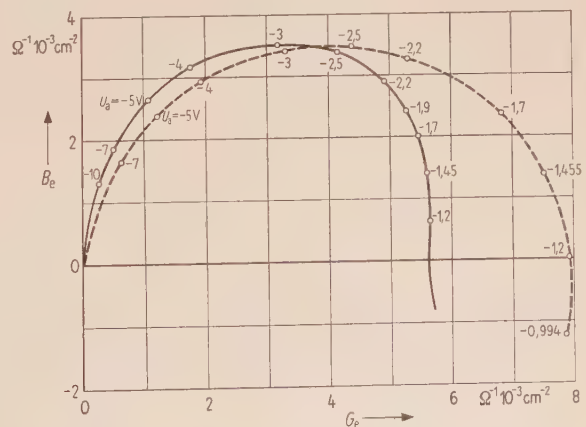
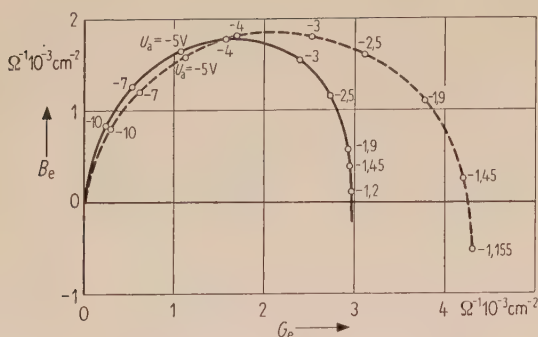
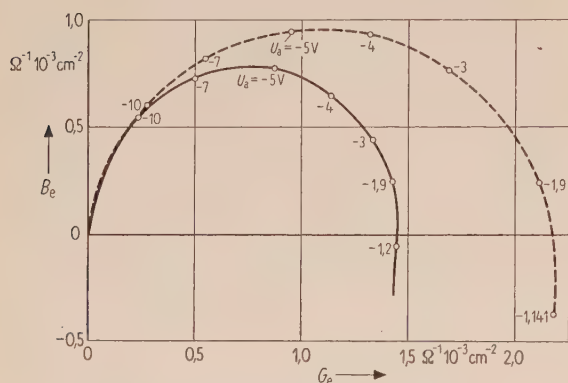
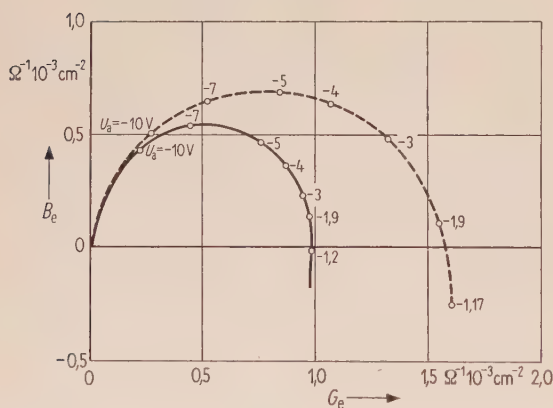
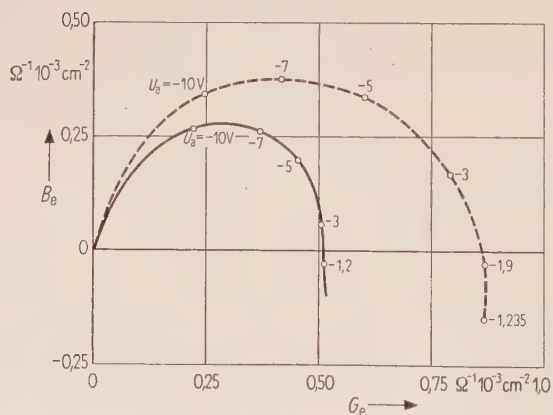


Bild 4. Vergleich der Ergebnisse für die elektronische Admittanz im Anlaufstromgebiet nach Messungen von HENNINGS [7] (—) und nach der Ersatzkreistheorie (---): $d = 183 \mu\text{m}$, $\sigma = 0,25 \text{ cm}^2$, $T = 1200^\circ\text{K}$, $J_s/\sigma = 6 \text{ Acm}^{-2}$, $f = 2,42 \text{ GHz}$.

Bild 5. Wie Bild 4, jedoch für $d = 250 \mu\text{m}$.Bild 6. Wie Bild 4, jedoch für $d = 350 \mu\text{m}$.Bild 7. Wie Bild 4, jedoch für $d = 410 \mu\text{m}$.Bild 8. Wie Bild 4, jedoch für $d = 560 \mu\text{m}$.

daß sich die Näherung bei beliebigen Raumladungsverhältnissen gut bewährt. Der Diodenabstand variiert in einem großen Bereich. Es ist nicht wahrscheinlich, daß die vorhandenen Abweichungen durch die Vernachlässigung der Transelektronen hervorgerufen sind. Vielmehr dürfte es sich um Effekte von höherer Ordnung in der Frequenz handeln, die von unserer Näherung nicht erfaßt werden. Die Einbeziehung des Falles unendlich großer Frequenzen in unseren Ersatzkreis vermeidet jedoch zu große Abweichungen bei größeren effektiven Laufwinkeln. Weitere Vergleiche mit noch unveröffentlichten Messungen führten zu ähnlichen Resultaten.

Man kann daraus schließen, daß die Beschreibung aller Rückelektronen durch einen einzigen RLC -Kreis eine erfolgreiche Näherung darstellt.

Dem European Research Office, Frankfurt, möchte ich auch an dieser Stelle für die Förderung der vorliegenden Arbeit bestens danken. Wertvolle Diskussionen verdanke ich den Herren Dr. J. BERGHAMMER und Dr. K. RICHTER.

Anhang

Ableitung und Lösung der Integralgleichung für die Wechselfeldstärke

Die Gl. (20) für die normierte Dichtefunktion kann mit Hilfe von Gl. (7) und unter Einführung der Maxwell'schen Verteilung für g_0 in der Form

$$j\Omega_s g + \sqrt{2} \sqrt{a^2 + e^{-\psi}} \left(w \frac{\partial g}{\partial \psi} - \frac{\partial g}{\partial w} \right) = \quad (\text{A. 1})$$

$$= -w F \exp \left(-\psi - \frac{w^2}{2} \right)$$

geschrieben werden. Führt man die neue Variable

$$W = \frac{w^2}{2} + \psi \quad (\text{A. 2})$$

ein, dann muß man die Fälle $w \geq 0$ und $w \leq 0$ getrennt behandeln. Für die Dichtefunktionen $g_+(w \geq 0)$ und $g_-(w \leq 0)$ gelten die Beziehungen

$$j\Omega_s g_+ + 2 \sqrt{W - \psi} \sqrt{a^2 + e^{-\psi}} \frac{\partial g_+}{\partial \psi} = \quad (\text{A. 3})$$

$$= -\sqrt{2} \sqrt{W - \psi} F e^{-W},$$

$$j\Omega_s g_- - 2 \sqrt{W - \psi} \sqrt{a^2 + e^{-\psi}} \frac{\partial g_-}{\partial \psi} = \quad (\text{A. 4})$$

$$= \sqrt{2} \sqrt{W - \psi} F e^{-W}$$

und die Randbedingungen

$$g_+ = 0 \quad \text{für} \quad \psi = 0, \quad (\text{A. 5})$$

$$g_- = g_+ \quad \text{für} \quad \psi = W. \quad (\text{A. 6})$$

Die Lösungen von Gl. (A. 3) und (A. 4) unter den Randbedingungen (A. 5), (A. 6) lauten

$$g_+ = -\frac{e^{-W}}{\sqrt{2}} \int_0^W \frac{F(y) dy}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} \times \quad (\text{A. 7})$$

$$\times \exp \{j\Omega_s [\tau(\psi, W) - \tau(y, W)]\},$$

$$g_- = -\frac{e^{-W}}{\sqrt{2}} \int_0^W \frac{F(y) dy}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} \times \\ \times \exp \{ -j\Omega_s [\tau(\psi, W) - \tau(y, W)] \} + \\ + j\sqrt{2} e^{-W} \exp \{ -j\Omega_s \tau(\psi, W) \} \times \quad (A. 8) \\ \times \int_0^W \frac{F(y) dy}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} \sin \{ \Omega_s \tau(y, W) \}.$$

In diesen Gleichungen wird die normierte Laufzeit $\tau(y, q)$ verwendet, die durch Gl. (23) definiert ist. Die Gl. (A. 7) und (A. 8) werden nun in die aus Gl. (21) gefolgerte Beziehung

$$\frac{I}{J_s} = j\Omega_s \sqrt{2\pi} F = \int_{\psi}^{\infty} dW g_- - \int_{\psi}^{\infty} dW g_+ \quad (A. 9)$$

eingesetzt. Durch Aufspaltung der Integration von 0 bis W der Gl. (A. 8) in die Integration von 0 bis ψ und von ψ bis W , sowie durch Vertauschen der Reihenfolge der Integrationen gelangt man zu der Integralgleichung (22), die durch den Ansatz Gl. (24) in die Gestalt von Gl. (25) und (26) gebracht wurde.

Zur Lösung von Gl. (25) geht man vom Integral

$$\int_{\psi}^{\infty} dq e^{-q} \tau(\psi, q) = \sqrt{\pi} (\sqrt{a^2 + e^{-\psi}} - a) \quad (A. 10)$$

aus, das durch Vertauschen der Integrationen gefunden wurde. Damit nimmt Gl. (25) die Form

$$1 = G(\psi) + \sqrt{a^2 + e^{-\psi}} \int_0^{\psi} \frac{G(y) dy}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} - \int_0^{\psi} G(y) dy + \\ + \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} \right) G(y) dy \quad (A. 11)$$

an. Durch Differentiation nach ψ erhält man

$$2e^{\psi} \sqrt{a^2 + e^{-\psi}} \frac{dG(\psi)}{d\psi} = \int_0^{\psi} \frac{G(y) dy}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}}. \quad (A. 12)$$

Eine weitere Differentiation ergibt

$$2(1 + a^2 e^{\psi}) \frac{d^2 G}{d\psi^2} + \\ + [2(1 + a^2 e^{\psi}) - 1] \frac{dG}{d\psi} - G = 0. \quad (A. 13)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$G = A_1 e^{-\psi} + A_2 [\psi e^{-\psi} + 2e^{-\psi} \ln(\sqrt{a^2 + e^{-\psi}} + a) - \\ - 2a \sqrt{a^2 + e^{-\psi}}]. \quad (A. 14)$$

Die Konstanten A_1, A_2 können durch Einsetzen von Gl. (A. 14) in die Integralgleichung (A. 11) gewonnen werden. Es spart Mühe, A_2 mit Hilfe der Forderung

$$G(\psi) \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad \psi \rightarrow \infty$$

zu bestimmen, aus der man

$$A_2 = -\frac{1}{2a^2}$$

findet. Aus der Integralgleichung ergibt sich weiterhin

$$A_1 = -2A_2 \left[\ln(\sqrt{a^2 + 1} + a) - \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \right]. \quad (A. 15)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (8) folgt daraus sofort die Lösung Gl. (27).

Die Gl. (26) für $H(\psi)$ wird in ähnlicher Weise gelöst. Mit Gl. (A. 10) läßt sich aus Gl. (26) die Beziehung

$$\int_0^{\psi} H(y) dy - H(\psi) - \sqrt{a^2 + e^{-\psi}} \int_0^{\psi} \frac{H(y) dy}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} + \\ + \int_0^{\infty} H(y) dy \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + e^{-y}}} - 1 \right) = \Psi(\psi) \quad (A. 16)$$

gewinnen. Durch Differentiationen erhält man wieder eine Differentialgleichung für H mit der allgemeinen Lösung

$$H(\psi) = A_3 e^{-\psi} + A_4 G(\psi) + \quad (A. 17)$$

$$+ e^{-\psi} \int_0^{\psi} dy e^y \frac{d\Psi(y)}{dy} \left[G(y) \frac{\sqrt{a^2 + e^{-y}}}{a} - 1 \right] - \\ - G(\psi) \int_0^{\psi} dy \frac{d\Psi(y)}{dy} \frac{\sqrt{a^2 + e^{-y}}}{a}.$$

Die Forderung

$$H \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \psi \rightarrow \infty$$

ergibt

$$A_4 = \int_0^{\infty} dy \frac{d\Psi(y)}{dy} \frac{\sqrt{a^2 + e^{-y}}}{a}. \quad (A. 18)$$

Durch Einsetzen von Gl. (A. 17) in (A. 16) findet man

$$A_3 = 0. \quad (A. 19)$$

Damit kann die Lösung Gl. (31) angegeben werden.

Schließlich soll das Integral aus Gl. (32) berechnet werden. Durch Vertauschen der Reihenfolge der Integration finden wir

$$\int_0^{\infty} \frac{H(\psi) d\psi}{\sqrt{a^2 + e^{-\psi}}} = \\ = \int_0^{\infty} dy \frac{d\Psi(y)}{dy} \frac{\sqrt{a^2 + e^{-y}}}{a} \int_0^y \frac{G(\psi) d\psi}{\sqrt{a^2 + e^{-\psi}}} + \\ + \int_0^{\infty} dy \frac{d\Psi(y)}{dy} e^y \left[G(y) \frac{\sqrt{a^2 + e^{-y}}}{a} - 1 \right] \times \\ \times \int_y^{\infty} \frac{e^{-\psi}}{\sqrt{a^2 + e^{-\psi}}} d\psi.$$

Daraus ergibt sich weiter

$$\int_0^{\infty} \frac{H(\psi) d\psi}{\sqrt{a^2 + e^{-\psi}}} = -2a \int_0^{\infty} dy \frac{d\Psi(y)}{dy} e^y \left[G(y) \frac{a^2 + e^{-y}}{a} - 1 \right].$$

Da $d\Psi/dy$ auf die Form

$$\frac{d\Psi}{dy} = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} dq \frac{e^{-q}}{\sqrt{q-y}\sqrt{a^2 + e^{-y}}} \times \times \int_0^q dp e^p \frac{\sqrt{a^2 + e^{-p}}}{\sqrt{q-p}\sqrt{a^2 + e^{-p}}} G(p) - 1$$

gebracht werden kann, findet man für unser Integral eine Darstellung, die zeigt, daß es immer negativ sein muß:

$$\int_0^{\infty} \frac{H(\psi) d\psi}{\sqrt{a^2 + e^{-\psi}}} = \frac{-a^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dq e^{-q} \times \times \left[\int_0^q dp e^p \frac{\sqrt{a^2 + e^{-p}}}{\sqrt{q-p}\sqrt{a^2 + e^{-p}}} G(p) - 1 \right]^2.$$

Das Integral in den eckigen Klammern kann durch eine langwierige, jedoch nicht schwierige Rechnung auf den Ausdruck

$$\int_0^q dp \sqrt{p} (a^2 + e^{p-q})^{-3/2}$$

zurückgeführt werden, womit die Gl. (33) und (34) folgen.

Symbolverzeichnis

$\alpha_T = \frac{\omega d \sqrt{2}}{v_T \psi_a}$	Parameter von GUNDLACH [6],
γ^2	Integrationskonstante,
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante des Vakuums,
$\zeta = \omega_s z / v_T$	normierte Distanz,
ξ, η	LANGMUIRS Parameter,
ϱ, ϱ_0	Raumladungsdichte,
σ	Querschnittsfläche der Kathode,
τ	normierte Laufzeit,
$\Phi(x)$	Gaußsche Fehlerfunktion,
$\psi = -U_0/U_T$	normierte Spannung (Potential),
$\Psi(\psi)$	durch Gl. (26) definierte Hilfsfunktion,
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz,
ω_p	Plasmakreisfrequenz,
ω_s	Plasmakreisfrequenz an der Kathode,
$\Omega_s = \omega/\omega_s$	normierte Frequenz,
a	Parameter zur Kennzeichnung der Gleichspannungsverhältnisse in der Diode,
A_1, A_2, A_3, A_4	Integrationskonstanten,

$C_0 = \sigma \epsilon_0 / d$	Kaltkapazität der Diode,
C_1, C_2	Kapazitäten im Ersatzkreis der Diode,
d	Kathoden-Anodenabstand,
$e > 0$	Elektronenladung,
E_0, E	Gleich- und Wechselfeldstärke,
f	Frequenz,
f_0, f	Gleich- und Wechseldichtefunktion,
F	normierte Feldstärke,
g, g_0, g_+, g_-	normierte Dichtefunktion,
G	normierte Dichtefunktion erster Ordnung in der Frequenz,
$h^-(\eta)$	Hilfsfunktion von LANGMUIR,
H	normierte Dichtefunktion zweiter Ordnung in der Frequenz,
I	Wechselgesamtsstrom,
J_0, J	Gleich- und Wechselkonvektionsstrom,
J_s	Sättigungsstrom,
J_{intl}	Influenzstrom,
k	Boltzmannsche Konstante,
L_2	Induktivität im Ersatzkreis der Diode,
L_1, L_k	Induktivität bei hohen Frequenzen,
p, q	Integrationsvariable,
$r(a)$	normierte Widerstandsfunktion,
R_2	Widerstand im Ersatzkreis der Diode,
U_0, U	Gleich- und Wechselspannung gegen Kathode,
$U_T = kT/e$	
v	Geschwindigkeitsvariable in der Liouville-Gleichung,
$v_T = \sqrt{kT/m}$	Temperaturgeschwindigkeit,
$w = v/v_T$	normierte Geschwindigkeit,
$W = \psi + w^2/2$	
y	Integrationsvariable,
Y_e	elektronische Admittanz,
$Y_7(\alpha_T)$	Hilfsfunktion von GUNDLACH [6],
z	Abstand von der Kathode,
T	Kathodentemperatur,
a (Index)	bezeichnet die Anodenebene,
k (Index)	bezeichnet Konvektionsstrom,
i (Index)	bezeichnet Influenzstrom,
0 (Index)	bezeichnet zeitunabhängige Größen.

Schrifttum

- [1] BEGOVICH, N. A., High frequency total emission loading in diodes. J. appl. Phys. **20** [1949], 457–461.
- [2] DIEMER, G., Microwave diode conductance in the exponential region. Philips Res. Rep. **6** [1951], 211–223.
- [3] DIEMER, G. und DIJKGRAAF, H., Langmuir's tables for the exponential region for the $I_a - V_a$ characteristic. Philips Res. Rep. **7** [1952], 45–53.
- [4] DRAGANESCU, M., A new equivalent circuit for diodes at frequencies corresponding to $0,1 \pi$. Rev. Phys. (Bukarest) **4** [1959], 61–68.
- [5] FREEMAN, J. J., The admittance of a diode with a retarding field. J. appl. Phys. **23** [1952], 743–745.
- [6] GUNDLACH, F. W., Laufzeiterscheinungen der Diode im Anlaufstromgebiet. Philips Res. Rep. **8** [1953], 419–426.
- [7] HENNINGS, K., Leitwertmessungen an einer planparallelen Diode im Laufzeitgebiet. Nachrichtentech. Z. **12** [1959], 459–467.
- [8] KNOL, K. S. und DIEMER, O., High-frequency diode admittance with retarding direct-current fields. Philips Res. Rep. **7** [1952], 251–258.
- [9] PAUCKSCH, H., Die Wirkungsweise von Raumladungsdioden bei UHF unter Berücksichtigung einer Maxwellischen Geschwindigkeitsverteilung. Nachrichtentech. Z. **9** [1956], 410–414.
- [10] SEKIGUCHI, T., Microwave electronic admittance parallel-plane electron tubes with very close electrode spacing. J. Fac. Engrg. Univ. Tokyo **24** [1955], 1–75.
- [11] SIEGMAN, A. E. und BLOOM, S., An equivalent circuit for microwave noise at the potential minimum. Transact. Inst. Radio Engrs. ED-**4** [1957], 295–299.
- [12] VAN DER ZIEL, A., Note on total emission damping and total emission noise. Proc. Inst. Radio Engrs. **38** [1950], 562.
- [13] VAN DER ZIEL, A., Extension and application of Langmuir's calculation on a plane diode with Maxwellian velocity distribution of the electrons. Philips Res. Rep. **1** [1945/46], 97–118.

Quantitative Transformationsvorgänge in einem rauscharmen Strahlerzeugungssystem

von KARL-B. NICLAS

Mitteilung aus dem Röhrenlaboratorium der Telefunken GmbH., Ulm (Donau)

(A.E.Ü. 15 [1961], 587—599; eingegangen am 18. August 1961)

DK 621.385.63

Für ein rauscharmes Strahlerzeugungssystem, dessen Potentialverteilung entlang der Elektronenstrahlachse gemessen worden ist, werden die Vierpolgrößen berechnet. Dies geschieht mit Hilfe eines Näherungsverfahrens, das den kontinuierlichen Verlauf der Transformationseigenschaften des Strahlerzeugungssystems berücksichtigt. Nach Berechnung der Transformationsgrößen werden der Verlauf der elektronischen Wechselgrößen U_{\sim} und ZI_{\sim} entlang der Strahlachse angegeben und die maximalen und minimalen Rauschfaktoren einer Wanderfeldröhre, in die das Strahlerzeugungssystem eingebaut worden ist, ermittelt.

Der theoretisch gefundene und der gemessene minimale Rauschfaktor stimmen gut überein.

The fourpole parameters are calculated for a low-noise electron gun whose potential distribution was measured in direction of the beam axis. The calculation is made with an approximation method taking into account the continuous transformation properties of the gun. After evaluating the fourpole parameters the alternating electronic quantities U_{\sim} and ZI_{\sim} are stated as a function along the beam axis and the maximum and minimum noise figures of a traveling-wave tube are calculated in which the low-noise gun is incorporated.

The theoretical minimum noise figure is in good agreement with the measuring value.

1. Einleitung

Die quantitativen Transformationsvorgänge innerhalb eines rauscharmen Strahlerzeugungssystems, wie es erstmalig von R. W. PETER [1] vorgeschlagen worden ist, sollen an Hand eines praktischen Beispiels verständlich gemacht werden. Ebenso soll gezeigt werden, welche Werte der durch die Stromschwankungen hervorgerufene Wechselkonvektionsstrom und die aus den Geschwindigkeitsschwankungen resultierende kinetische Wechselspannung entlang der Strahlachse annehmen.

Ausgangspunkt der Berechnungen ist die praktische Ausführung eines rauscharmen Strahlerzeugungssystems für eine Wanderfeldröhre im 3-GHz-Bereich. Bei dieser Wanderfeldröhre handelt es sich um einen Spezialaufbau mit veränderbarer Laufräumlänge, die von außen eingestellt werden kann. Diese Eigenschaft ermöglicht das Messen einer Anzahl für das Strahlerzeugungssystem charakteristischer Rauschgrößen, die mit den theoretisch gefundenen Werten verglichen werden sollen.

Da eine exakte Lösung der Elektronenwellengleichungen für beliebige Potentialverteilungen entlang der Strahlachse nicht möglich ist, werden diese mit Hilfe eines Näherungsverfahrens [2] aufgestellt. Diese Näherungsmethode weicht von der im Jahre 1957 von BUCHMILLER, DE GRASSE und WADE angegebenen Methode [3] insofern ab, als sie den kontinuierlichen Charakter der Transformationseigenschaften, der sich aus der stetigen Potentialverteilung in Elektronenstrahlrichtung ergibt, berücksichtigt. Die größere Genauigkeit der mit dem in [2] angegebenen Verfahren berechneten Transformationsgrößen muß aber gegenüber der Sprungfunktion-Methode nach [3] durch einen größeren Zeitaufwand erkauft werden.

Nachdem die Transformationsparameter des Strahlerzeugungssystems, das sich aus dem Dioden-, dem Transformations- und dem Phasentransformationsbereich zusammensetzt, bestimmt worden sind, werden die charakteristischen Rauschgrößen einer Wanderfeldröhre ermittelt, in die das Strahlerzeugungssystem eingebaut worden ist. Dabei zeigt sich eine große Abhängigkeit des Rauschverhaltens vom Radius des Elektronenstrahles. Da der Strahlradius durch das Feld des Fokussierungsmagneten verändert werden kann, beeinflußt dieses merklich das Eigenrauschen der Wanderfeldröhre.

Der näherungsweise berechnete Verlauf des Rauschfaktors im Laufraum der Wanderfeldröhre wird mit den Messungen verglichen. Dabei zeigt sich eine gute Übereinstimmung für den Betrag und die örtliche Lage der minimalen Rauschfaktoren. Die theoretisch und meßtechnisch gefundenen Werte der maximalen Rauschfaktoren hingegen differieren um 2,6 dB voneinander.

2. Die Elektronenwellengleichung und ihre Näherungslösungen

Über die näherungsweise Lösung des Differentialgleichungspaares, das die Transformation der elektronischen Wechselgrößen entlang eines Elektronenstrahles beschreibt, wurde auf der Tagung „Mikrowellenröhren“ München, Juni 1960, berichtet [2]. An dieser Stelle soll, besonders im Hinblick auf die praktische Anwendung, auf das Verfahren näher eingegangen werden. Um das Arbeiten mit den aufgestellten Formeln zu erleichtern, werden zusätzlich ihre zugeschnittenen Größengleichungen angegeben.

Wie in [2] schon gezeigt wurde, werden die Änderungen der kinetischen Wechselspannung U_{\sim} und des Wechselkonvektionsstromes I_{\sim} entlang der Achse eines Elektronenstrahles, in dessen Aus-

breitungsrichtung die Gleichpotentialverteilung beliebig aber stetig ist, unter der Voraussetzung einer eindimensionalen Elektronenströmung durch das Differentialgleichungspaar¹

$$\frac{d^2 U_{\sim}}{d\zeta^2} + \left(\frac{p_0}{p} \frac{\beta_p}{\beta_{p0}} \right)^2 U_{\sim} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{d^2 I_{\sim}}{d\zeta^2} - \frac{d}{d\zeta} \ln \left(\frac{p_0}{p} \frac{\beta_p}{\beta_{p0}} \right)^2 \frac{d I_{\sim}}{d\zeta} + \left(\frac{p_0}{p} \frac{\beta_p}{\beta_{p0}} \right)^2 I_{\sim} = 0 \quad (1b)$$

mit
$$U_{\sim} = \frac{v_{\sim}}{e/m} \exp \left(j \int_{z_0}^z \frac{\omega}{v_{\sim}} dz \right) \quad (1c)$$

und
$$I_{\sim} = I_{\text{konv}} \exp \left(j \int_{z_0}^z \frac{\omega}{v_{\sim}} dz \right) \quad (1d)$$
 beschrieben².

$$\zeta = p_0 \beta_{p0} \int_{z_0}^z \left(\frac{p}{p_0} \right)^2 dz = \quad (1e)$$

$$= 1,74 p_0 \frac{(I_{\sim}/\mu A)^{1/2}}{(b/\text{mm})(U_{\sim}/V)^{3/4}} \int_{z_0/\text{cm}}^{z/\text{cm}} \left(\frac{p}{p_0} \right)^2 \frac{dz}{\text{cm}}$$

ist der Elektronenstrahlwinkel. Er wird durch das Produkt aus der reduzierten Plasmaphasenkonstante $p_0 \beta_{p0}$ in der Ebene von z_0 und der reduzierten Elektronenstrahlänge

$$l = \int_{z_0}^z \left(\frac{p}{p_0} \right)^2 dz$$

dargestellt. Das Verhältnis der Plasmareduktionsfaktoren p/p_0 ist vom Strahlradius b , von der Signalkreisfrequenz ω und von der Elektronengleichgeschwindigkeit v_{\sim} abhängig.

In praktischen Fällen der Untersuchung beschleunigter oder verzögerter Elektronenstrahlen kann man den Radius a der leitenden Zylinder, die den Elektronenstrahl umgeben, zu einem Vielfachen des Strahlradius annehmen. Da sich aber die Plasmareduktionsfaktoren für Radienverhältnisse $4 \leq a/b \leq \infty$ nur noch unwesentlich voneinander unterscheiden und in dem hier vorliegenden rauscharmen Strahlerzeugungssystem $a/b > 4$ ist, können diese der Kurve $p = f(\gamma b)$ für $a/b \rightarrow \infty$, z. B. in [4], entnommen werden.

Unter der Annahme, daß sich der Strahlradius und der Strahlstrom nicht ändern, erhält man aus den Elektronenwellengleichungen (1a) und (1b) das Differentialgleichungspaar

$$\frac{d^2 U_{\sim}}{d\zeta^2} + \chi^{-2}(\zeta) U_{\sim} = 0, \quad (2a)$$

$$\frac{d^2 I_{\sim}}{d\zeta^2} - 2 \frac{d}{d\zeta} \ln [\chi^{-1}(\zeta)] \frac{d I_{\sim}}{d\zeta} + \chi^{-2}(\zeta) I_{\sim} = 0 \quad (2b)$$

¹ Eine Zusammenstellung der wichtigsten verwendeten Bezeichnungen findet sich am Schluß des Beitrages.

² Der Index 0 bezieht sich auf die Größen in der Eingabeebene des Elektronenstrahles.

mit

$$\chi(\zeta) = \frac{p(\zeta)}{p(\zeta_0)} \left[\frac{U_{\sim}(\zeta)}{U_{\sim}(\zeta_0)} \right]^{3/4} \quad (2c)$$

Ist die Funktion $\chi(\zeta)$ bekannt, so ergeben die Lösungen von Gl. (2) die Abhängigkeit der kinetischen Wechselspannung U_{\sim} und des Wechselkonvektionsstromes I_{\sim} vom Elektronenstrahlwinkel ζ .

Da sich ein allgemeines Lösungssystem für beliebige Funktionen $\chi(\zeta)$ nicht angeben läßt, muß nach einem Näherungsverfahren gegriffen werden. Eine einfache Methode ist die Zerlegung der Originalfunktion $\chi(\zeta)$ in k Funktionsabschnitte, in denen $\chi(\zeta)$ durch Geraden angenähert wird. Auf diese Weise entsteht ein Polygonzug, wie er in Bild 1 dargestellt ist. Physikalisch wird dadurch der Elektronenstrahl in k Strahlabschnitte und damit in k Teilvierpole zerlegt (Bild 2).

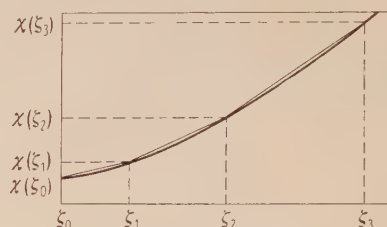


Bild 1. Annäherung der Originalfunktion $\chi(\zeta)$ durch einen Polygonzug.

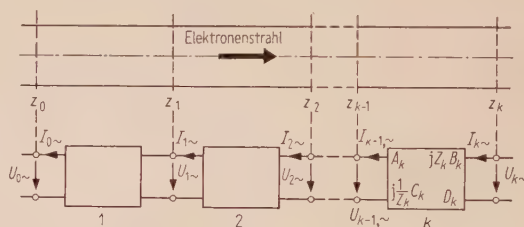


Bild 2. Kettenschaltung der Strahlabschnitte zur Berechnung der Transformationsgrößen des Elektronenstrahls.

Die Anzahl k der Intervalle des durch $\chi(\zeta_{k-1})$ dividierten Elektronenstrahlwinkels

$$\Delta \zeta_k = \frac{p_0 \beta_{p, k-1}}{p_{k-1} \beta_{p0}} (\zeta_k - \zeta_{k-1}) = \frac{1}{\chi(\zeta_{k-1})} (\zeta_k - \zeta_{k-1}) \quad (3)$$

muß dabei so gewählt werden, daß der Polygonzug mit den Näherungsgeraden

$$1 + a_k \Delta \zeta_k = \frac{\chi(\zeta_k)}{\chi(\zeta_{k-1})} = \xi_k \quad (4)$$

die Originalfunktion $\chi(\zeta)$ möglichst gut annähert. Die Steigung der Geraden ist

$$a_k = \frac{\chi(\zeta_k) - \chi(\zeta_{k-1})}{\zeta_k - \zeta_{k-1}} \quad (5)$$

mit
$$\chi(\zeta_k) = \frac{p(\zeta_k)}{p(\zeta_0)} \left[\frac{U_{\sim}(\zeta_k)}{U_{\sim}(\zeta_0)} \right]^{3/4} \quad (6)$$

Bei der praktischen Anwendung des Näherungsverfahrens geht man von der Gleichspannungsverteilung in Bewegungsrichtung der Elektronen aus.

Diese läßt sich, auch bei Berücksichtigung der Raumladung, mit Hilfe eines Widerstandsnetzwerkes [5] oder eines elektrolytischen Tanks mit großer Genauigkeit bestimmen. Mit Gl. (1e) erhält man dann die Abhängigkeit des Elektronenstrahlwinkels ζ von der Strahllänge z . Hierbei ist es zweckmäßig, den Integralausdruck auf graphischem Wege zu ermitteln.

Der Verlauf der Funktion $\chi(\zeta)$, Gl. (2c), wird dadurch bestimmt, daß man zunächst

$$\chi(z) = \frac{p(z)}{p(z_0)} \left[\frac{U_-(z)}{U_-(z_0)} \right]^{3/4} \quad (7)$$

bildet und dann aus den Kurvenverläufen $\zeta(z)$ und $\chi(z)$ für gleiche Strahllängen z die Funktion $\chi(\zeta)$ gewinnt. Sie bildet den Ausgangspunkt aller Berechnungen des Näherungsverfahrens.

Sind die Größen ξ_k und a_k in jedem Intervall berechnet, so können mit den Formeln

$$a_k \neq 2$$

$$A_k = \xi_k^{1/2} \left[\cosh(\delta_k \ln \xi_k) - \frac{1}{2\delta_k} \sinh(\delta_k \ln \xi_k) \right], \quad (8a)$$

$$B_k = \xi_k^{1/2} \frac{1}{a_k \delta_k} \sinh(\delta_k \ln \xi_k), \quad (8b)$$

$$C_k = \xi_k^{-1/2} \frac{1}{a_k \delta_k} \sinh(\delta_k \ln \xi_k), \quad (8c)$$

$$D_k = \xi_k^{-1/2} \left[\cosh(\delta_k \ln \xi_k) + \frac{1}{2\delta_k} \sinh(\delta_k \ln \xi_k) \right], \quad (8d)$$

$$a_k = 2$$

$$A_k = \xi_k^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \ln \xi_k \right), \quad (9a)$$

$$B_k = \frac{1}{2} \xi_k^{1/2} \ln \xi_k, \quad (9b)$$

$$C_k = \frac{1}{2} \xi_k^{-1/2} \ln \xi_k, \quad (9c)$$

$$D_k = \xi_k^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{2} \ln \xi_k \right) \quad (9d)$$

$$\text{und} \quad \delta_k = \frac{1}{a_k} \left[\sqrt{\frac{a_k^2}{4} - 1} \right] \quad (10)$$

die Vierpolelemente jedes Teilvierpols bestimmt werden. Hierbei ist zu beachten, daß für $a_k < 2$ der Faktor δ_k imaginär wird und die Hyperbelfunktionen in den Gl. (8) in trigonometrische Funktionen übergehen. Da in den Lösungen (Gl. (8) und (9)) nur elementare Funktionen enthalten sind, ist ihre Auswertung relativ einfach. In [2] sind die Vierpolgrößen in Abhängigkeit vom Elektronenstrahlwinkel für verschiedene positive Steigungsparameter a_k graphisch dargestellt.

In Bereichen niedriger Elektronengeschwindigkeiten, d.h. im Gebiet vor der Kathode, ändert sich der Plasmareduktionsfaktor p nur sehr wenig. Unterhalb der Beschleunigungsspannung

$$\frac{U_-}{V} \leq \left(2 \frac{f}{\text{GHz}} \frac{b}{\text{mm}} \right)^2 \quad (11)$$

kann man ihn zu $p = 1$ annehmen, ohne wesentliche Fehler zu machen [6]. Für diesen Fall vereinfachen sich die Gl. (1) zu dem Differentialgleichungspaar

$$\frac{d^2 U_-}{dz^2} + \beta_p^2 U_- = 0, \quad (12a)$$

$$\frac{d^2 I_-}{dz^2} - 2 \frac{d}{dz} (\ln \beta_p) \frac{d I_-}{dz} + \beta_p^2 I_- = 0. \quad (12b)$$

Im Bereich der Gleichspannungsbedingung (Gl. (11)) können die Differentialgleichungen (12) auf eine planparallele Diode oder den Diodenbereich eines rauscharmen Strahlerzeugungssystems angewandt werden.

Die Gl. (12) lassen sich für eine planparallele Diode aber in eine noch einfachere, gleichgeschwindigkeitsabhängige Form bringen. Die Gleichbeschleunigung \dot{v}_- innerhalb einer planparallelen Diode wird durch die Formel

$$\dot{v}_- = \omega_p \sqrt{2v_-(v_- - \bar{v}_0)} \quad (13)$$

beschrieben [6]. Ihre Änderung in z -Richtung beträgt

$$\frac{d\dot{v}_-}{dz} \approx \frac{\ddot{v}_-}{v_-} = \omega_p^2 = \frac{e}{m} \frac{\rho_-}{\varepsilon_0}. \quad (14)$$

Mit den Gl. (13) und (14) findet man nun unter Berücksichtigung von

$$\frac{dU_-}{dz} = \frac{dt}{dz} \frac{dv_-}{dt} \frac{dU_-}{dv_-} \approx \frac{\dot{v}_-}{v_-} \frac{dU_-}{dv_-}$$

nach einigen Rechenschritten das Elektronenwellengleichungspaar für die planparallele Diode. Es lautet [6]

$$v_-(\bar{v}_0 - v_-) \frac{d^2 U_-}{dv_-^2} + \frac{1}{2} (v_- - 2\bar{v}_0) \frac{dU_-}{dv_-} - \frac{1}{2} U_- = 0, \quad (15a)$$

$$v_-(\bar{v}_0 - v_-) \frac{d^2 I_-}{dv_-^2} - \frac{1}{2} (5v_- - 4\bar{v}_0) \frac{dI_-}{dv_-} - \frac{1}{2} I_- = 0. \quad (15b)$$

Dabei handelt es sich um hypergeometrische Differentialgleichungen, deren Lösungen durch die Vierpolgleichung

$$\begin{pmatrix} U_{1-} \\ I_{1-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & jZ_0 B_1 \\ j\frac{1}{Z_0} C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{0-} \\ I_{0-} \end{pmatrix} \quad (16)$$

vollständig beschrieben werden.

Die in der Transformationsmatrix enthaltenen Vierpolgrößen

$$A_1 = 2 - \frac{v_-}{\bar{v}_0}, \quad B_1 = \sqrt{2 \left(\frac{v_-}{\bar{v}_0} - 1 \right)}, \quad (17a, b)$$

$$C_1 = \frac{1}{v_-/\bar{v}_0} \sqrt{2 \left(\frac{v_-}{\bar{v}_0} - 1 \right)}, \quad D_1 = \frac{1}{v_-/\bar{v}_0} \quad (17c, d)$$

sind nur von dem Gleichgeschwindigkeitsverhältnis v_-/\bar{v}_0 abhängig³.

³ Die Lösungen (Gl. (16)) wurden ebenfalls von L. D. SMULLIN [7], S. BLOOM und R. W. PETER [8] auf anderen Wegen gefunden.

Die elektronischen Wechselgrößen können nun bei Kenntnis der kinetischen Wechsellspannung $U_{0\sim}$, des Wechselkonvektionsstromes $I_{0\sim}$ und des charakteristischen Strahlwiderstandes Z_0 im Potentialminimum mit den Gl. (16) und (17) berechnet werden.

Für die mittleren Quadrate der elektronischen Wechselgrößen und für den charakteristischen Strahlwiderstand im Potentialminimum gelten die Formeln [9], [13]

$$\begin{aligned}\tilde{U}_0^2 &= 2(4 - \pi) \frac{(k T_k)^2}{e I_-} \Delta f = \\ &= 2,05 \cdot 10^{-15} \frac{(T_k / ^\circ\text{K})^2 \Delta f / \text{MHz}}{I_- / \mu\text{A}} \text{V}^2,\end{aligned}\quad (18a)$$

$$\tilde{I}_0^2 = I_-^2 2 e I_- \Delta f = 3,2 \cdot 10^{-19} \frac{I_-}{\mu\text{A}} \frac{\Delta f}{\text{MHz}} \text{A}^2, \quad (18b)$$

$$\begin{aligned}Z_0 &= \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\left(\frac{\pi}{2} \frac{k T_k}{m}\right)^{3/2}}{\frac{e}{m} \omega^2 \varepsilon_0 F I_-}} = \\ &= 55,4 \frac{(T_k / ^\circ\text{K})^{3/4}}{f \left(\frac{I_-}{\mu\text{A}} \frac{F}{\text{mm}^2}\right)^{1/2}} \Omega.\end{aligned}\quad (18c)$$

3. Das rauscharme Strahlerzeugungssystem

3.1. Beschreibung

Bei dem rauscharmen Strahlerzeugungssystem, das hier näher untersucht werden soll, handelt es sich um ein System mit normaler Potentialverteilung im Raum unmittelbar vor der Kathode, wie es von R. W. PETER [1] beschrieben worden ist. Es setzt sich, wie Bild 3 zeigt, neben der Kathode aus insgesamt fünf Elektroden zusammen, durch die der Elektronenstrahl hindurchtritt, bevor er in den mit der 5. Elektrode beginnenden gleichfeldfreien Laufraum gelangt. Letzterer befindet sich auf Wendelpotential. Die Fokussierungselektrode ist mit der Kathode verbunden. Der Strahlstrom wird durch die Spannung der ersten Anode bestimmt. Um mit Hilfe eines geeigneten Potentialverlaufes die durch das Rauschen hervorgerufene Strom- und Geschwindigkeitsmodulation in ihren Amplituden

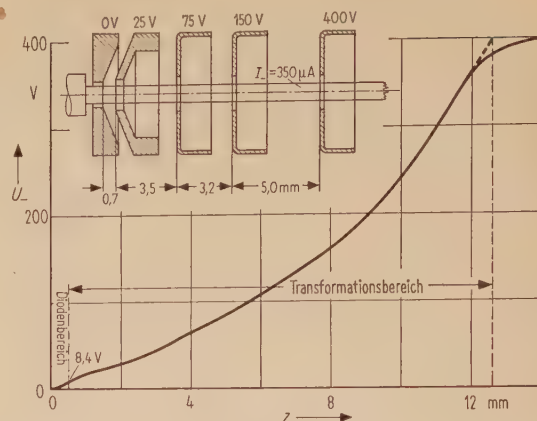


Bild 3. Potentialverlauf entlang der Strahlachse unter Berücksichtigung der Raumladung.

und Phasen zu beeinflussen, können die Spannungen der beiden folgenden Elektroden beliebig verändert werden. Sie sollen dabei an einem vorgegebenen Ort, z.B. dem Eingang der Verzögerungsleitung einer Wanderfeldröhre, für das Rauschen der Röhre optimale Werte annehmen.

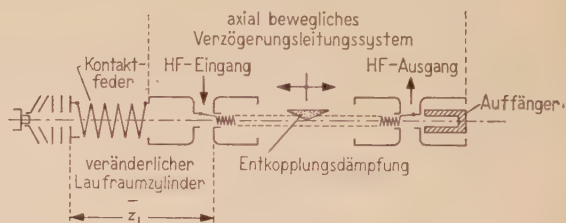


Bild 4. Anordnung zur Messung der Eigenrauschzahl einer rauscharmen Wanderfeldröhre in Abhängigkeit von der Laufräumlänge.

Das in Bild 3 schematisch dargestellte Strahlerzeugungssystem befindet sich in einer speziellen Wanderfeldröhrenanordnung, deren Laufräumlänge innerhalb des Vakuumgefäßes verändert werden kann (Bild 4). Bild 5 zeigt die praktische Ausführung der Meßwanderfeldröhre mit dem bewegbaren Verzögerungsleitungssystem, die theoretisch und meßtechnisch untersucht werden soll. Die an die einzelnen Elektroden gelegten Spannungen können, ebenso wie der unter Einfluß der Raumladung auf einem Widerstandsnetzwerk bestimmte

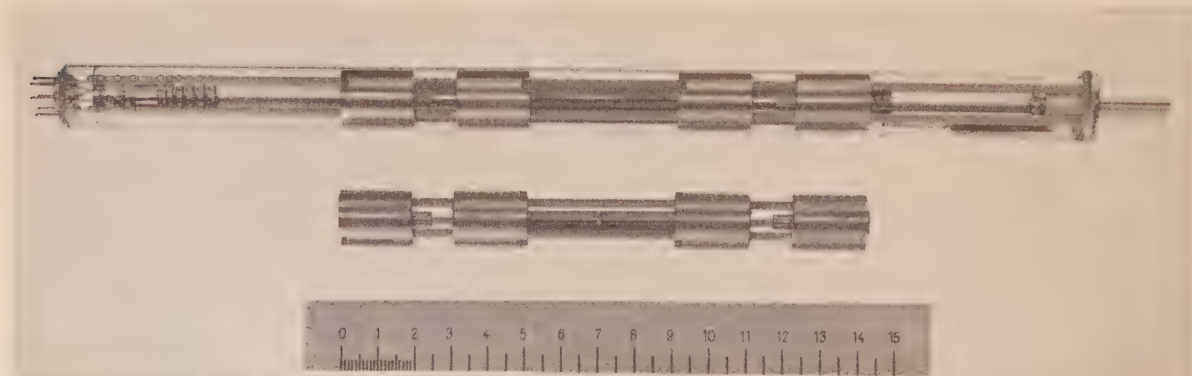


Bild 5. Rauscharme Wanderfeldröhre mit bewegbarem Verzögerungsleitungssystem.

Potentialverlauf in Ausbreitungsrichtung der Elektronen, Bild 3 entnommen werden. Letzterer gehorcht dem Raumladungsgesetz nur bis zu einem Abstand von etwa 0,5 mm von der Kathode. Es ist also nicht zulässig, das gesamte Gebiet zwischen Kathode und 1. Anode als Diodenbereich zu behandeln.

Die Potentialverteilung nach Bild 3 bildet nun den Ausgangspunkt der folgenden Berechnungen und Untersuchungen.

3.2. Berechnung der Rauschgrößen

Zur Berechnung der Rauschgrößen ist es zweckmäßig, das Strahlerzeugungssystem entsprechend seinen Funktionen, in drei Teilbereiche, nämlich in den Dioden-, den Transformations- und den Phasentransformationsbereich, aufzuteilen (Bild 6). Jeder dieser Funktionsbereiche stellt einen Vierpol dar, dessen Transformationseigenschaften durch die vier Elemente seiner Vierpolmatrix vollständig charakterisiert sind.

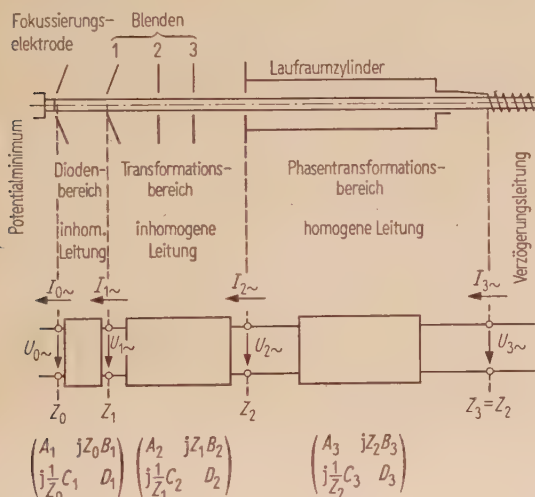


Bild 6. Funktionsbereiche eines rauscharmen Strahlerzeugungssystems.

3.2.1. Diodenbereich

Wie schon erwähnt, ergab die Untersuchung der Potentialverteilung, daß sich der Diodenbereich bis zu einem axialen Abstand von 0,5 mm von der Kathode erstreckt und daß bis zu dieser Entfernung das Raumladungsgesetz gültig ist. An der den Diodenbereich begrenzenden Äquipotentialebene wurde eine Spannung von $U_- = 8,4$ V gemessen.

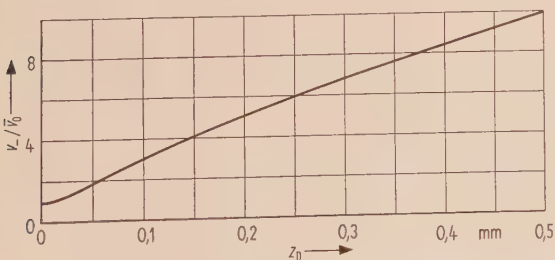


Bild 7. Die relative Elektronengeschwindigkeit im Diodenbereich.

Der relative Geschwindigkeitsverlauf v_-/\bar{v}_0 entlang der Diodenachse kann mit (19)

$$\left(\frac{v_-}{\bar{v}_0} - 1\right) \left(\frac{v_-}{\bar{v}_0} + 2\right)^2 = \left(\frac{v_{2-}}{\bar{v}_0} - 1\right) \left(\frac{v_{2-}}{\bar{v}_0} + 2\right)^2 \left(\frac{z_D}{d}\right)^2$$

(v_{2-} Elektronengleichgeschwindigkeit in der Ebene $z_D = d$)

berechnet werden [7]. Er ist in Bild 7 als Funktion der Strahllänge z_D aufgezeichnet. Die Transformationsparameter können, da die für die Untersuchungen gültigen Größen ($f = 3$ GHz, $b = 0,65$ mm⁴, $U_- = 8,4$ V) die Bedingungsgleichung (11) erfüllen, mit den Gl. (17) in Abhängigkeit von der relativen Geschwindigkeit v_-/\bar{v}_0 bestimmt werden. In Bild 8 sind diese mit Hilfe von Gl. (17) und (19) entlang der Strahlachse aufgetragen. Ihr Ursprung liegt in der Ebene des Potentialminimums. Wie später noch gezeigt werden soll, treten im Diodenbereich die größten Änderungen der Transformationsgrößen des Strahlerzeugungssystems mit der axialen Längenkoordinate z auf.

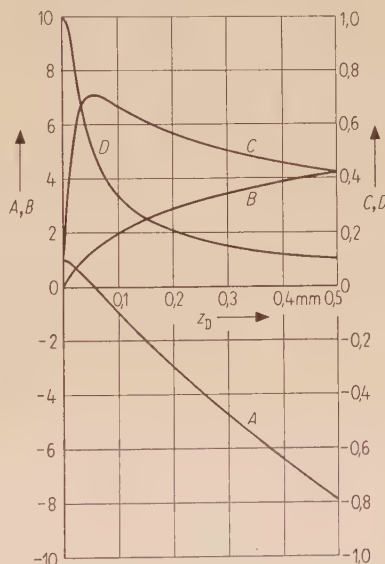


Bild 8. Die Transformationsparameter im Diodenbereich.

3.2.2. Transformationsbereich

In diesem Gebiet wollen wir, da sich kein Lösungssystem der Elektronenwellengleichungen (2) für beliebige Potentialverteilungen angeben läßt, das eingangs beschriebene Näherungsverfahren anwenden. Hierzu ist es zunächst einmal erforderlich, den Plasmareduktionsfaktor p als Funktion der Strahllänge im Transformationsbereich z_T zu ermitteln. Da die Potential- und damit die Gleichgeschwindigkeitsverteilung entlang der Achse bekannt sind, kann er der Kurve $p = f(\gamma b)$ in [4] für $a/b \rightarrow \infty$, $f = 3$ GHz und $b = 0,65$ mm entnommen werden. Der Elektronenstrahlwinkel läßt sich darauf mit Gl. (1e) berechnen. Er ist in Bild 9 als Funktion der Länge des Transformationsbereiches z_T dargestellt.

⁴ Im Phasentransformationsbereich experimentell ermittelter Strahlradius (Kathodenradius $r_K = 0,5$ mm).

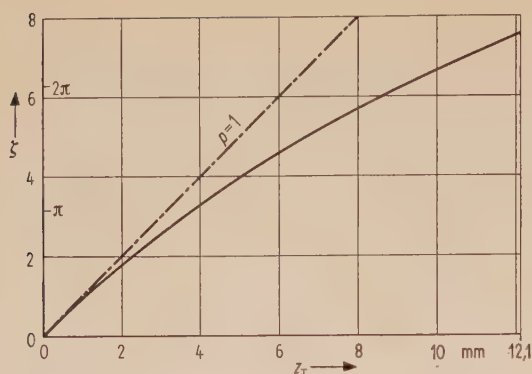
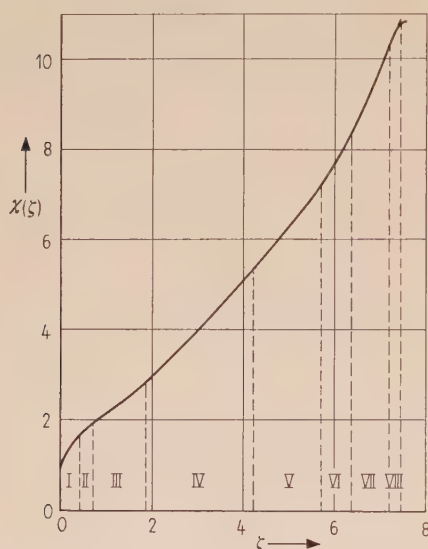
Bild 9. Der Elektronenstrahlwinkel ζ im Transformationsbereich.

Bild 10. Kurvenlauf zur Bestimmung der Vierpolgrößen des Transformationsbereiches.

Alle von der Länge z_T abhängigen Größen können jetzt auch als Funktion des Elektronenstrahlwinkels ζ angegeben werden. Wir sind also in der Lage, die Funktion $\chi(\zeta)$ (Gl. (2c)) zu berechnen. Sie ist in Bild 10 aufgezeichnet.

Zur Anwendung des Näherungsverfahrens wird die Kurve $\chi(\zeta)$ in acht Teilbereiche zerlegt. Dabei

sind die Bereichsintervalle ($\zeta_k - \zeta_{k-1}$) so bemessen, daß ihre Kurvenabschnitte möglichst gut durch Geraden gemäß Bild 1 angenähert werden. — In Bild 10 ist auf die Darstellung dieser Näherungsgeraden verzichtet worden, da sie fast mit der Kurve $\chi(\zeta)$ zusammenfallen. — Der so entstehende Polygonzug ist unsere Näherungsfunktion, die im weiteren Verlauf näher untersucht werden soll.

Insgesamt haben wir, entsprechend den acht Strahlabschnitten, acht Teilvierpole vor uns, die, zusammengeschaltet, die Transformationseigenschaften des Transformationsbereiches näherungsweise wiedergeben. Wie die Lösungsformeln der Näherungsmethode (Gl. (8), (9) und (10)) zeigen, benötigen wir zur Berechnung der Transformationsparameter die Größen ξ_k und a_k eines jeden Teilbereiches. Diese können mit den Gl. (4) und (5) bestimmt werden. Sind sie bekannt, so lassen sich die Transformationsparameter aus den Gl. (8) bis (10) ermitteln. In Tabelle I sind sie für jeden Teilbereich angegeben.

Mit dem Elektronenstrahlvierpol des Diodenbereichs, dessen Parameter mit $A_1 = -7,8984$, $B_1 = 4,2186$, $C_1 = 0,4262$ und $D_1 = 0,1010$ für $z_D = 0,5$ mm schon berechnet wurden, sind insgesamt neun Vierpole vorhanden, die zusammengeschaltet werden müssen, um das Verhalten des rauscharmen Strahlerzeugungssystems bis zum Eingang des Phasentransformationsbereiches kennenzulernen.

Da uns der Transformationsverlauf entlang der Strahlachse interessiert, schalten wir zuerst den Diodenvierpol mit dem I. Teilvierpol zusammen. Darauf wird der so entstandene neue Vierpol mit dem II. verbunden, usw. Nach dem I. Teilvierpol des Transformationsbereiches erhält man die elektronischen Wechselgrößen

$$\begin{pmatrix} U_{II\sim} \\ I_{II\sim} \end{pmatrix} = M^{(I)} M^{(1)} \begin{pmatrix} U_{0\sim} \\ I_{0\sim} \end{pmatrix} \quad (20a)$$

$$\text{mit } M^{(I)} M^{(1)} = \quad (20b)$$

$$= \begin{pmatrix} A_I A_1 - (Z_I/Z_0) B_I C_1 & j Z_0 [A_I B_1 + (Z_I/Z_0) B_I D_1] \\ j \frac{1}{Z_0} [D_I C_1 + (Z_0/Z_I) C_I A_1] & D_I D_1 - (Z_0/Z_I) C_I B_1 \end{pmatrix},$$

wobei $Z_I = Z_1$ den charakteristischen Strahlwiderstand am Ausgang des Diodenbereiches bedeutet.

Tabelle I. Die Teilvierpolparameter im Phasentransformationsbereich für $b = 0,65$ mm. (Z_k/Z_0 ist das Verhältnis der charakteristischen Strahlwiderstände am Eingang des k -ten Teilvierpols zu dem im Potentialminimum.)

Nr.	a_k	ξ_k	A_k	B_k	C_k	D_k	Z_k/Z_0
I	1,5865	1,6476	0,9416	0,4014	0,2437	0,9581	29,80
II	0,9489	1,1763	0,9850	0,1821	0,1552	0,9866	48,88
III	0,7543	1,4497	0,8650	0,5725	0,3950	0,8947	57,65
IV	1,0794	1,9079	0,7822	0,7921	0,4152	0,8581	83,50
V	1,2598	1,3520	0,9685	0,2767	0,2047	0,9741	159,33
VI	1,8025	1,1613	0,9964	0,0893	0,0769	0,9967	215,53
VII	2,3907	1,2376	0,9957	0,0993	0,0802	0,9963	250,07
VIII	1,6553	1,0397	0,9998	0,0240	0,0231	0,9997	309,68

Bezeichnet man mit

$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} A_k & jZ_k B_k \\ j\frac{1}{Z_k} C_k & D_k \end{pmatrix} \quad (k = \text{I, II, ... , VIII}) \quad (21a)$$

die Teilvierpolmatrix des k -ten Teilvierpols, so sind am Ausgang des Transformationsbereiches der Strom und die Spannung

$$\begin{pmatrix} U_{2\sim} \\ I_{2\sim} \end{pmatrix} = M^{(\text{VIII})} \dots M^{(\text{I})} M^{(\text{I})} \begin{pmatrix} U_{0\sim} \\ I_{0\sim} \end{pmatrix} \quad (21b)$$

vorhanden. Z_k ist der charakteristische Strahlwiderstand am Eingang des k -ten Teilvierpols.

Man findet zunächst die Verläufe der Transformationsparameter als Funktion des Elektronenstrahlwinkels ζ , kann sie aber mit Hilfe von Bild 9 auch

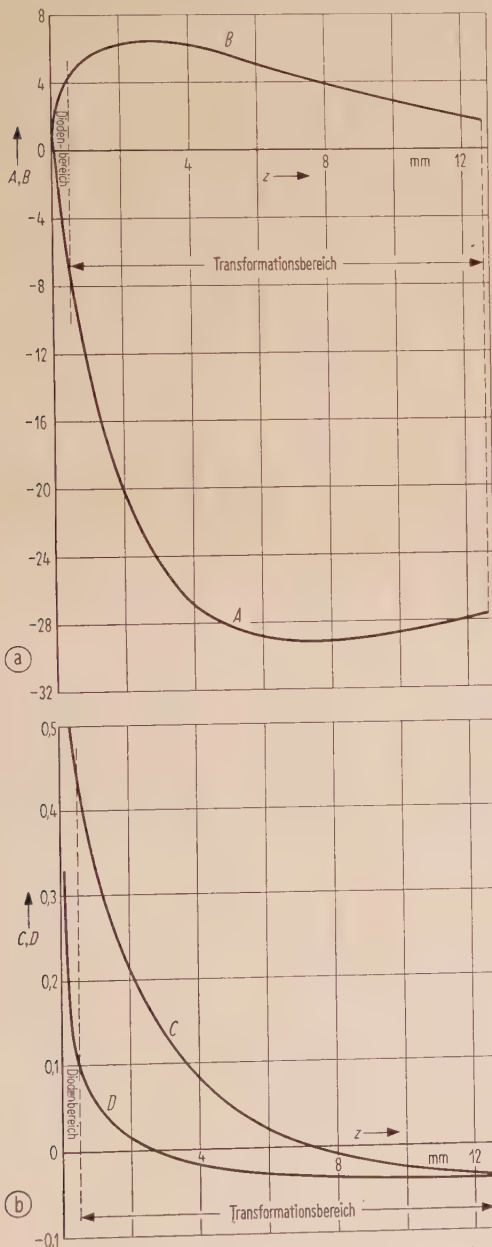


Bild 11. (a) Die Spannungstransformationsparameter und (b) die Stromtransformationsparameter im rauscharmen Strahlerzeugungssystem.

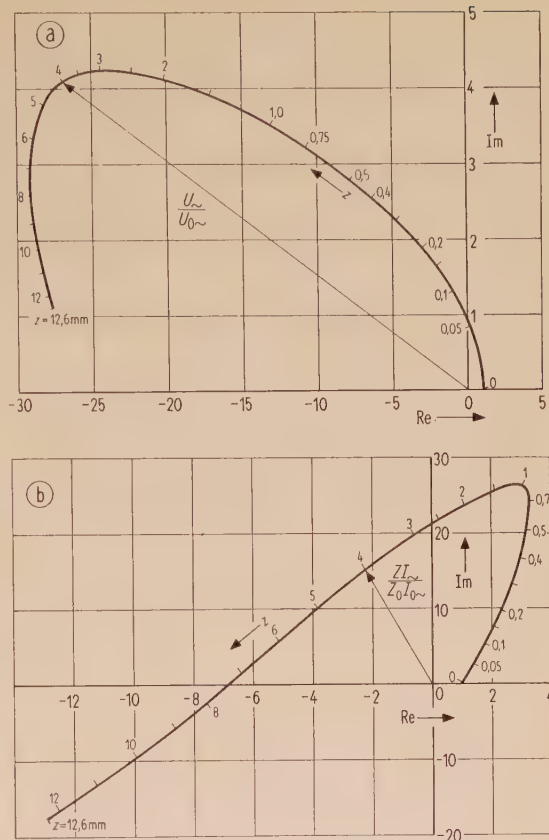


Bild 12. (a) Die Ortskurve $U_{\sim}/U_{0\sim}$ und (b) die Ortskurve $ZI_{\sim}/Z_0I_{0\sim}$ mit der Strahlänge z als Parameter.

in Abhängigkeit der Elektronenstrahlänge z angeben, wie es in Bild 11 a, b geschehen ist.

Bild 12 a, b zeigt als Funktion von z die Ortskurven der kinetischen Wechselspannung U_{\sim} und des Produktes aus charakteristischem Strahlwiderstand und Wechselkonvektionsstrom ZI_{\sim} bezogen auf ihre Werte im Potentialminimum. Mit Hilfe der Parametrierung der Kurven können in jedem Punkt entlang der Strahlachse die relativen Wechselgrößen abgelesen werden. Man gewinnt so eine Vorstellung über die Transformationseigenschaften innerhalb des vorgegebenen Strahlerzeugungssystems mit der in Bild 3 angegebenen Potentialverteilung.

Nachdem die Transformationseigenschaften des rauscharmen Strahlerzeugungssystems zwischen Potentialminimum und Ende des Transformationsbereiches durch die Vierpolgrößen $A_{12} = -27,664$, $B_{12} = 1,650$, $C_{12} = -0,03545$, $D_{12} = -0,03827^5$ für $z = z_D + z_T = 12,6$ mm und das Widerstandsverhältnis $Z_2/Z_0 = 321,76$ charakterisiert sind, sollen jetzt einige für das Rauschen einer rauscharmen Wanderfeldröhre wichtige Größen berechnet werden.

Für die Eigenrauschzahl einer Wanderfeldröhre gilt die Formel [6]

$$F_z = F_{z-} + \Delta \hat{F}_z \cos(2\Phi_L + \epsilon). \quad (22)$$

⁵ Der Index 12 bezieht sich auf den aus Dioden- und Transformationsbereich gebildeten Vierpol.

Hierin bedeuten

$$F_{z-} = (F_{zu} + F_{zt}) (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \quad (23a)$$

und

$$\Delta \hat{F}_z = (F_{zu} + F_{zt}) |\alpha^2 + \beta^2| \sqrt{1 - \frac{2 F_{zu} F_{zt}}{(F_{zu} + F_{zt})^2} [1 - \cos(\gamma_1 - \gamma_2)]}. \quad (23b)$$

Die Rauschkomponenten F_{zu} und F_{zt} können mit ⁵

$$F_{zu} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4} Q C}{2 Z_2 k T_0 \Delta f} \tilde{U}_0^2 \left[\frac{\cos \alpha_2}{B_{12}} \frac{Z_2/Z_0}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} \right]^2 = \quad (24a)$$

$$= 0,667 \sqrt{4} Q C \frac{f}{\text{GHz}} \frac{b}{\text{mm}} \frac{T_k/^\circ\text{K}}{T_0/^\circ\text{K}} \frac{(T_k/1000^\circ\text{K})^{1/4}}{(I_-/100 \mu\text{A})^{1/2}} \left[\frac{\cos \alpha_2}{B_{12}} \frac{Z_2/Z_0}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} \right]^2$$

$$\text{und} \quad F_{zt} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4} Q C}{2 Z_2 k T_0 \Delta f} Z_0^2 \tilde{I}_0^2 \left(\frac{B_{12}}{\cos \alpha_2} \right)^2 = \quad (24b)$$

$$= 0,322 I_-^2 \sqrt{4} Q C \frac{T_k/^\circ\text{K}}{T_0/^\circ\text{K}} \frac{(I_-/100 \mu\text{A})^{1/2}}{(f/\text{GHz}) (b/\text{mm})} \frac{1}{(T_k/1000^\circ\text{K})^{1/4}} \left(\frac{B_{12}}{\cos \alpha_2} \right)^2$$

berechnet werden.

Die Größen α_1 und α_2 sind von den Transformationsparametern und dem Widerstandsverhältnis Z_2/Z_0 abhängig:

$$\tan \alpha_1 = \frac{Z_2}{Z_0} \frac{C_{12}}{A_{12}}, \quad (25a)$$

$$\tan \alpha_2 = - \frac{Z_2}{Z_0} \frac{D_{12}}{B_{12}}. \quad (25b)$$

Ferner werden zur Berechnung der Eigenrauschzahl noch der Winkel

$$\Phi_L = p \frac{\omega_p}{v_-} z_L \quad (26a)$$

im Phasentransformationsbereich (Laufraumwinkel) sowie die Winkel

$$\varepsilon = \arctan \frac{F_{zu} \sin \gamma_1 + F_{zt} \sin \gamma_2}{F_{zu} \cos \gamma_1 + F_{zt} \cos \gamma_2}, \quad (26b)$$

$$\gamma_1 = 2\alpha_1 - \varphi, \quad \gamma_2 = 2\alpha_2 - \varphi \quad (26c, d)$$

$$\text{und} \quad \varphi = \arctan \frac{\alpha \beta^* + \alpha^* \beta}{|\alpha|^2 - |\beta|^2} \quad (26e)$$

benötigt.

Die komplexen Größen

$$\alpha = \delta_2 + \delta_3 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\delta_2 \delta_3 - 4 Q C}{\sqrt{4} Q C} \quad (27a, b)$$

enthalten die von J. R. PIERCE [10] vorgeschlagenen Wanderfeldröhrenparameter: C Verstärkungsparameter, Q Raumladungsparameter und δ_2, δ_3 Wellenfortpflanzungsparameter.

Die in den Gl. (27) angegebenen Wanderfeldröhrengrößen sind für eine verlustlose Verzögerungsleitung im Punkt maximaler Verstärkung, d. h. bei optimaler Wendelspannung, nur vom QC -Parameter abhängig. Zu seiner Berechnung wurden an der in Bild 5 dargestellten Versuchsröhre durch Messung folgende Daten ermittelt:

1. reduzierte Plasmawellenlänge

$$\lambda_q = \frac{2\pi}{p} \frac{v_-}{\omega_p} = 19,5 \text{ cm},$$

2. Verstärkungsparameter $C = 2,9 \cdot 10^{-2}$

und 3. Elektronengeschwindigkeit innerhalb der Verzögerungsleitung $v_- = 1,2 \cdot 10^9 \text{ cm/s}$.

Daraus ergibt sich bei der Signalfrequenz $f = 3 \text{ GHz}$ der Parameter

$$4 Q C \approx \left(\frac{1}{C} \frac{p \omega_p}{\omega} \right)^2 = 0,5$$

$$\text{und mit} \quad \frac{b/\text{mm}}{p} = 0,277 \frac{(I_-/\mu\text{A})^{1/2}}{(U_-/V)^{3/4}} \frac{\lambda_q}{\text{cm}} \quad (28)$$

$$\text{aus} \quad \lambda_q = \frac{2\pi}{p} \frac{v_-}{\omega_p}$$

der Strahlradius

$$b = 0,65 \text{ mm}.$$

Dieser für den gleichfeldfreien Laufraum gültige mittlere Strahlradius weicht infolge Strahlaufspreizung vom Kathodenradius $r_k = 0,5 \text{ mm}$ der Versuchsröhre um 30% ab. Es ist zu vermuten, daß der mittlere Elektronenstrahlradius des gesamten Strahlerzeugungssystems zwischen 0,60 mm und 0,65 mm liegen wird. Damit sind alle Größen bekannt, die zur Berechnung der charakteristischen Rauschgrößen des Strahlerzeugungssystems erforderlich sind. Für den Strahlradius $b = 0,65 \text{ mm}$ erhält man aus Gl. (25) die Winkel

$$\alpha_1 = 22,41^\circ \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 82,37^\circ$$

und mit diesen aus den Gl. (24) bei der Kathodentemperatur $T_k = 1000^\circ\text{K}$ und dem Strahlstrom $I_- = 350 \mu\text{A}$ die Rauschkomponenten

$$F_{zu} = 4,73 \quad \text{und} \quad F_{zt} = 0,36.$$

Bei $4 Q C = 0,5$ findet man für eine verlustlose Wendel als Verzögerungsleitung nach [10] die Wanderfeldröhrenparameter

$$|\alpha^2 + \beta^2| = 1,62 \quad \text{und} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 2,15$$

sowie den Winkel $\varphi = 58,92^\circ$ aus Gl. (26e).

In die Gl. (23a), (23b) eingesetzt, ergeben sie den Gleich- und Wechselanteil der Eigenrauschzahl

$$F_{z-} = 10,95, \quad \Delta \hat{F}_z = 7,37.$$

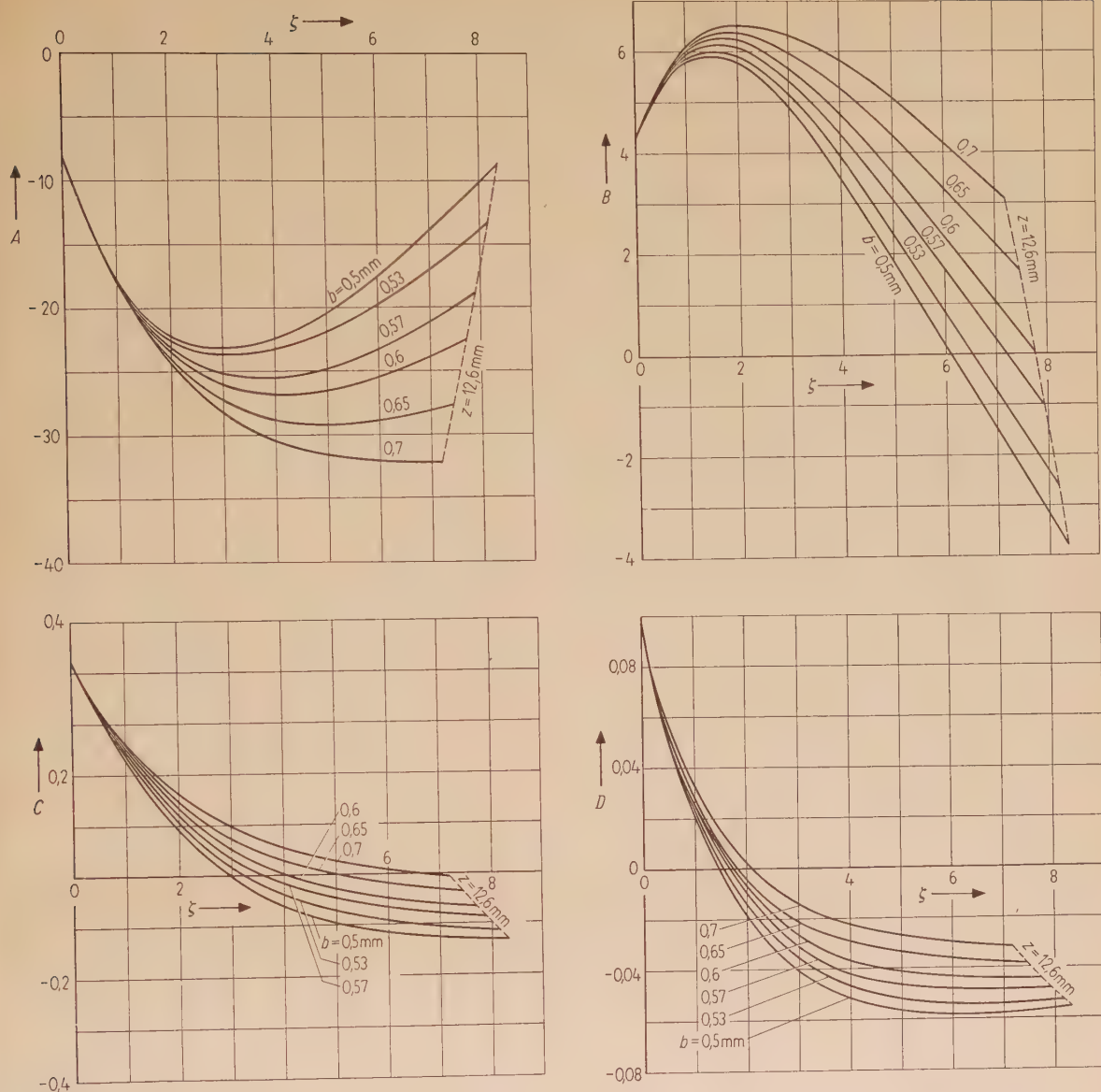


Bild 13. Die Vierpolgrößen A , B , C und D im Transformationsbereich für verschiedene Strahlradien b .

Nach Gl. (22) hat die minimal erreichbare Eigenrauschzahl $F_{z,\min}$ des Strahlerzeugungssystems beim optimalen Laufraumwinkel $\Phi_{L,\text{opt}}$ (Gl. (30)) den theoretischen Wert

$$F_{z,\min} = F_{z-} - \Delta \hat{F}_z = 3,58,$$

entsprechend einem minimalen Rauschfaktor von $F_{\min} = 6,6$ dB⁶.

3.2.3. Phasentransformationsbereich

Im Phasentransformationsbereich setzen sich die Lösungen der Elektronenwellengleichungen (2) aus trigonometrischen Funktionen zusammen. Die elektronischen Wechselgrößen U_{\sim} und I_{\sim} werden durch die Matrixgleichung [11], [12]

$$\begin{pmatrix} U_{3\sim} \\ I_{3\sim} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Phi_L & j Z_2 \sin \Phi_L \\ j \frac{1}{Z_2} \sin \Phi_L & \cos \Phi_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2\sim} \\ I_{2\sim} \end{pmatrix} \quad (29)$$

beschrieben.

Gemäß Gl. (22) ändert sich die Eigenrauschzahl einer Wanderfeldröhre periodisch mit dem Laufraumwinkel Φ_L . Er ist der Laufraumlänge z_L direkt proportional. Diese muß zur Erzielung der minimalen Rauschzahl so dimensioniert werden, daß die Bedingung [13]

$$2 \Phi_{L,\text{opt}} + \varepsilon = \pm \pi \quad (30)$$

erfüllt wird.

Der Winkel ε kann mit Gl. (26 b) berechnet werden. Man findet den Wert

$$\varepsilon = -10^\circ 28'.$$

⁶ Ein Vergleich mit den Meßwerten erfolgt am Schluß des Beitrages.

Die minimale Rauschzahl ist somit bei einem Laufraumwinkel $\Phi_{L,opt} = 95^\circ 14'$ vorhanden. Mit $p\beta_p = 0,322 \text{ cm}^{-1}$ innerhalb des Laufraumes entspricht dieser Winkel einer Laufraumlänge von $z_L = 51,5 \text{ mm}^6$.

3.3. Einfluß des Strahlradius

Es soll jetzt festgestellt werden, welchen Einfluß der Strahlradius auf die Transformationseigenschaften unseres Strahlerzeugungssystems und damit auf das Rauschverhalten der Röhre hat. Diese Untersuchung ist deshalb interessant, weil der Strahlradius zwischen Kathode und Laufraumeingang nicht konstant bleibt. Wie schon gezeigt wurde, beträgt der aus der reduzierten Plasmawellenlänge λ_q ermittelte mittlere Strahlradius im gleichfeldfreien Laufraum $b = 0,65 \text{ mm}$. Da die Kathode einen Radius $r_k = 0,5 \text{ mm}$ besitzt, kann man in erster Näherung annehmen, daß zwischen Kathode und Laufraumeingang der Strahlradius im Bereich $0,5 \text{ mm} \leq b \leq 0,65 \text{ mm}$ liegt.

Im Diodenbereich sind, soweit die Bedingung (11) erfüllt ist, die Transformationseigenschaften nicht vom Strahlradius abhängig. Wir werden daher im folgenden seinen Einfluß auf den Transformationsbereich betrachten.

In Bild 13a bis d sind die Elemente der Vierpolmatrix des Diodenbereiches in Abhängigkeit vom Elektronenstrahlwinkel ζ für verschiedene Radien b innerhalb des Transformationsbereiches dargestellt. Der Elektronenstrahlwinkel beginnt in der Trennungsebene zwischen Dioden- und Transformationsbereich mit $\zeta = 0$. In dieser Ebene haben die Transformationsparameter die für das Ende des Diodenabschnittes gültigen Werte (Bild 8).

In Bild 14a und b sind diejenigen Transformationsparameter als Funktionen des Strahlradius aufgezeichnet, die in der Ausgangsebene des Transformationsbereiches vorhanden sind. Hier sieht man

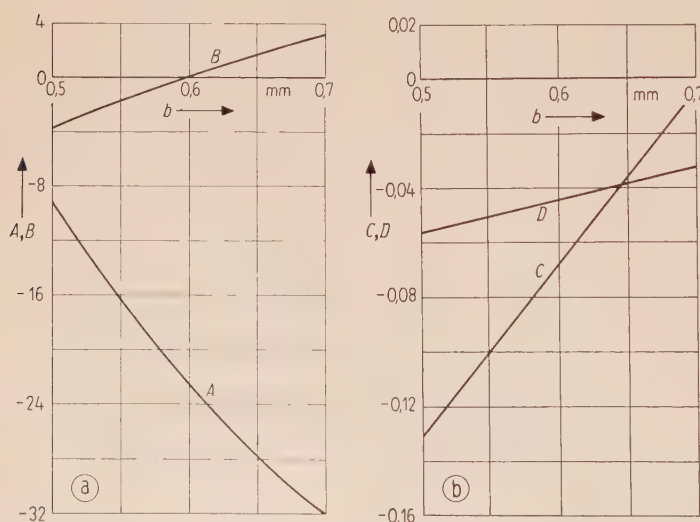


Bild 14. (a) Die Spannungstransformationsparameter und (b) die Stromtransformationsparameter am Ausgang des Transformationsbereiches in Abhängigkeit vom Strahlradius b .

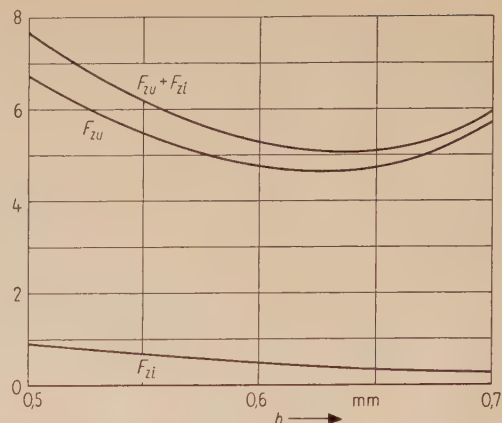


Bild 15. Die Rauschkomponenten F_{zu} und F_{zi} als Funktionen des Strahlradius b .

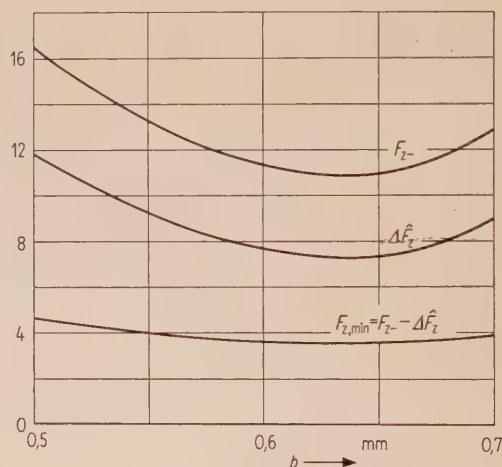


Bild 16. Die zusätzlichen Rauschzahlen als Funktionen des Strahlradius b .

sehr deutlich den großen Einfluß des Strahlradius auf das Verhalten unseres Strahlerzeugungssystems.

Die Rauschkomponenten $F_{zu}(b)$ und $F_{zi}(b)$ nach Gl. (24) sowie ihre Summe sind in Bild 15 dargestellt. Ebenso wie der Gleich- und der Wechselanteil der zusätzlichen Rauschzahl nach Gl. (22) in Bild 16 weisen diese ein Minimum in Abhängigkeit vom Strahlradius auf. Die theoretisch minimal erzielbare Eigenrauschzahl unserer Röhre schwankt innerhalb des Radienbereiches $0,5 \text{ mm} \leq b \leq 0,7 \text{ mm}$ zwischen $4,62 \geq F_{z,min} \geq 3,58$, entsprechend einem Rauschfaktorbereich $7,5 \text{ dB} \geq F_{min} \geq 6,6 \text{ dB}$. Wie man sieht, macht sich der Einfluß des Strahlradius bei der minimalen Eigenrauschzahl weit weniger bemerkbar als bei ihrem Gleich- oder Wechselanteil.

Da der Strahldurchmesser mit steigendem Fokussierungsmagnetfeld sich mehr und mehr dem Kathodendurchmesser nähert, wird die minimale Eigenrausch-

zahl unserer Anordnung mit wachsender Fokussierungsfeldstärke ein Minimum durchlaufen, um dann wieder anzusteigen. Diese theoretische Forderung konnte experimentell nachgewiesen werden.

Wie in [9] gezeigt wurde, läßt sich der Zusammenhang der Eigenrauschzahlanteile einer Wanderfeldröhre durch die Hyperbelgleichung

$$\left(\frac{F_{z-}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \right)^2 - \left(\frac{\Delta \hat{F}_z}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \right)^2 = \frac{4 Q C}{(2 k T_0 \Delta f)^2} \tilde{U}_0^2 \tilde{I}_0^2 \quad (31)$$

beschreiben. In Bild 17 sind die theoretisch bestimmte Rauschtransformationshyperbel und die zugehörige Ellipse für unsere Meßwanderfeldröhre konstruiert.

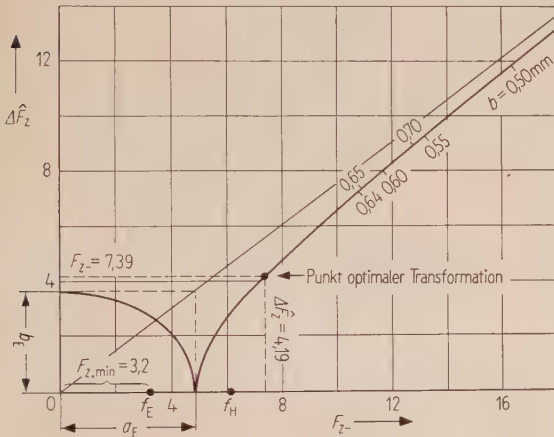


Bild 17. Die Rauschtransformationshyperbel des Strahlerzeugungssystems.

Bei optimaler Transformation erhält man für die charakteristischen Rauschgrößen unserer Röhre die Werte $F_{z-} = 7,39$, $\Delta \hat{F}_z = 4,19$ und $F_{z, \min} = 3,2$. Aus der Parametrierung der Rauschtransformationshyperbel ist aber zu entnehmen, daß für die eingangs gewählte Potentialverteilung mit keinem Strahldurchmesser der Punkt optimaler Transformation erreicht werden kann. Mit dem in Bild 3 dargestellten Strahlerzeugungssystem kann, bei der dort vorgegebenen Potentialverteilung, die optimale Rauschzahl nach unseren theoretischen Berechnungen also nicht verwirklicht werden. Sicherlich wird aber eine geringfügige Änderung der Elektrodenspannungen die optimalen Transformationsbedingungen befriedigen.

Wir müssen jetzt noch den Einfluß des Strahlradius b auf den Winkel ε (Gl. (26b)) untersuchen, da ε über die Bedingung Gl. (30) den Laufräumwinkel $\Phi_{L, \text{opt}}$ bestimmt, bei dem die minimale Eigenrauschzahl der Röhre erreicht wird.

In Bild 18 ist der Verlauf des Winkels ε als Funktion des Strahlradius b dargestellt. Innerhalb des betrachteten Radienbereiches $0,5 \text{ mm} \leq b \leq 0,7 \text{ mm}$ ändert er sich um mehr als 150° . Dieses entspricht einer Änderung des optimalen Laufräumwinkels

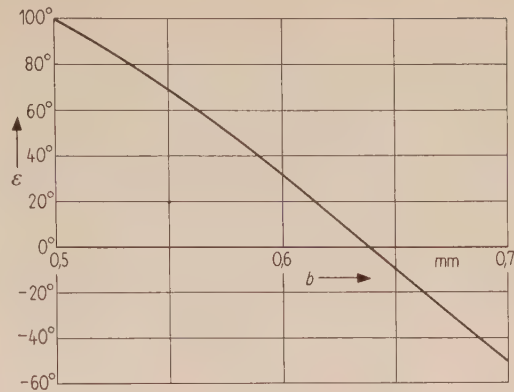


Bild 18. Der Winkel ε als Funktion des Strahlradius b .

$\Phi_{L, \text{opt}}$ um mehr als 75° . Man erkennt daraus den großen Einfluß des Strahldurchmessers auf die optimale Laufräumlänge des Strahlerzeugungssystems, denn zu 75° gehört eine Längenänderung von $\Delta z_L = 41 \text{ mm}$.

4. Vergleich mit den Meßwerten an einer Wanderfeldröhre ⁷

Es soll jetzt ein Vergleich zwischen den berechneten und den an der in Bild 5 dargestellten Wanderfeldröhre gemessenen Rauschfaktoren vorgenommen werden. Die in Bild 4 schematisch aufgezeichnete Wanderfeldröhrenanordnung besteht aus dem in Bild 3 gezeigten rauscharmen Strahlerzeugungssystem und einer in axialer Richtung verschiebbaren Verzögerungsleitungsanordnung, an welcher auch der Auffänger befestigt ist. Die letzte Blende des Strahlerzeugungssystems ist mit Hilfe einer Zugfeder mit dem bewegbaren System, welches in Bild 5 ebenfalls dargestellt ist, verbunden.

Das gesamte Röhrensystem ist durch drei Keramikträger gehalten. Während diese mit der Elektronenkanone und dem Röhrenende starr verbunden sind, dienen sie der Verzögerungsleitungsanordnung als Führungsschienen. Das bewegbare System ist wiederum auf drei Keramikstäben aufgebaut, zwischen drei weiteren ist die Verzögerungsleitung eingeklemmt. Eine Zugfeder zwischen Auffänger und Röhrenende sorgt für dessen Spannungszuführung.

Die axiale Bewegung des Verzögerungsleitungssystems und damit die Einstellung des Laufraumes wird durch Klopfen bei nahezu vertikaler Lage der Röhre vorgenommen. Dabei läßt sich die Laufräumlänge in den Grenzen $36 \text{ mm} \leq z_L \leq 100 \text{ mm}$ verändern.

Bei der Kathodentemperatur $T_k = 1000^\circ \text{ K}$, dem Strahlstrom $I_- = 350 \mu\text{A}$, dem Fokussierungsmagnetfeld $H = 1000 \text{ Oe}$ und der in Bild 3 angegebenen Potentialverteilung wurden nun die Rauschfaktoren F in Abhängigkeit von der Laufräumlänge gemessen. Das Ergebnis zeigen die Meßpunkte in Bild 19, welche durch die gestrichelte Linie verbun-

⁷ Die Messungen wurden im Oktober 1959 durchgeführt.

den worden sind. Zum Vergleich sind die theoretisch gefundenen Kurven der Rauschfaktoren für die beiden Strahlradien $b = 0,65 \text{ mm}$ und $b = 0,615 \text{ mm}$ ebenfalls eingezeichnet.

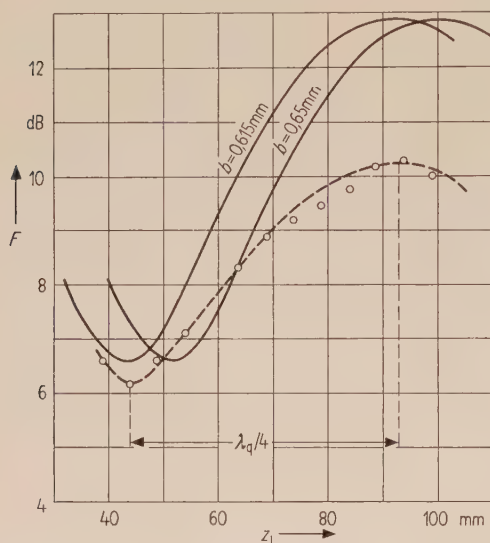


Bild 19. Der Verlauf der berechneten und gemessenen Rauschfaktoren in Abhängigkeit von der Laufräumlänge z_L .

Gehen wir von dem in Abschnitt 3.2.2 gewählten Strahlradius $b = 0,65 \text{ mm}$ aus, so läßt sich eine gute Übereinstimmung der minimalen Rauschfaktoren und der optimalen Laufräumlänge feststellen, während die maximalen Rauschfaktoren um 2,6 dB voneinander abweichen.

Wie schon erwähnt, wird der Strahlradius im Transformationsbereich sicherlich kleiner als der für den Phasentransformationsbereich ermittelte, $b = 0,65 \text{ mm}$, sein, da der Elektronenstrahl ja von einer Kathode mit dem Radius $r_k = 0,5 \text{ mm}$ emittiert wird. Für $b = 0,615 \text{ mm}$ stimmen nun die meßtechnischen und theoretisch ermittelten optimalen Laufräumlängen genau überein. Für die Übereinstimmung der minimalen und maximalen Rauschfaktoren gilt auch hier das für den Radius $b = 0,65 \text{ mm}$ Gesagte.

In Tabelle II sind die berechneten und die durch Messung gefundenen Werte der Röhre einander gegenübergestellt.

Tabelle II. Vergleich der berechneten und der gemessenen Daten einer rauscharmen Wanderfeldröhre.

	b mm	F_{\min} dB	F_{\max} dB	$z_{L, \text{opt}}$ mm
berechnet	0,65	6,6	12,85	51,5
	0,615	6,6	12,85	44
gemessen	—	6,2	10,3	44

Die Differenz zwischen Theorie und Messung kann einmal dadurch erklärt werden, daß die phy-

sikalischen Randbedingungen, die der Berechnung zugrunde lagen, nicht genügend bekannt sind, zum anderen, daß das hier gewählte physikalische Modell gegenüber der Wirklichkeit zu stark vereinfacht worden ist. Sicherlich spielt hier die Änderung des Strahlradius entlang der Strahlachse, die ja in der Untersuchung nicht berücksichtigt worden ist, eine große Rolle. Die Übereinstimmung der minimalen Rauschfaktoren und der optimalen Laufräumlängen ist aber so gut, daß das eingangs beschriebene Näherungsverfahren für ähnliche Untersuchungen als durchaus anwendbar erscheint.

Die große Anzahl der in diesem Beitrag durchgeführten Berechnungen wurde von Fr. H. REBBERT mit viel Sorgfalt und Interesse durchgeführt. Ihrer wertvollen Mithilfe gilt mein besonderer Dank.

Bezeichnungen

ϵ_0	Dielektrizitätskonstante des Vakuums,
e	Elementarladung,
m	Ruhemasse des Elektrons,
k	Boltzmannsche Konstante,
U_{\sim}	Wechselspannung gemäß Gl. (1c),
I_{\sim}	Wechselstrom gemäß Gl. (1d),
I_{konv}	Wechselkonvektionsstrom,
U_{-}	Gleichspannung,
I_{-}	Gleichstrom,
ϱ_{-}	Gleichanteil der Raumladungsdichte,
v_{\sim}	Wechselgeschwindigkeit der Elektronen,
$v_{-} = \sqrt{2 \frac{e}{m} U_{-}}$	Gleichgeschwindigkeit der Elektronen,
$\bar{v}_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{k T_k}{m}}$	mittlere Elektronengeschwindigkeit im Potentialminimum,
z	Weg in Strahlrichtung (Elektronenstrahl- länge),
z_D	Elektronenstrahlänge im Diodenbereich,
z_T	Elektronenstrahlänge im Transforma- tionsbereich,
z_L	Elektronenstrahlänge im Phasentrans- formationsbereich (Laufräum),
a	Radius eines den Elektronenstrahl umge- benden leitenden Zylinders (siehe [4]),
b	Strahlradius,
d	Gesamtlänge des Diodenbereiches,
F	Strahlquerschnitt,
A, B, C, D	Elemente der Vierpolmatrizen,
$Z = 2 \frac{U_{-}}{I_{-}} \frac{p \omega_p}{\omega}$	charakteristischer Strahlwiderstand,
ω	Signalkreisfrequenz,
f	Signalfrequenz,
Δf	Übertragungsbandbreite,
$\omega_p = \sqrt{\frac{e}{m} \frac{I_{-}}{\epsilon_0 v_{-} F}}$	Plasmakreisfrequenz,
$\beta_p = \omega_p / v_{-}$	Plasmaphasenkonstante,
$\gamma \approx \omega / v_{-}$	radiale Phasenkonstante der Elektronen,
p	Plasmareduktionsfaktor,
Φ_L	Laufräumwinkel,
T_k	Kathodentemperatur in $^{\circ}\text{K}$,
T_0	Raumtemperatur in $^{\circ}\text{K}$ (290 $^{\circ}\text{K}$).

Schrifttum

- [1] PETER, R. W., Low-noise traveling-wave amplifier. RCA Rev. **13** [1952], 344—368.
- [2] NICLAS, K.-B., Ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Vierpoleigenschaften von Elektronenstrahlen mit Hilfe elementarer Funktionen. Telefunken-Röhre, H. 38 [1960], 61—70.
- [3] BUCHMILLER, L. D., DE GRASSE, R. W. und WADE, G., Design and calculation procedures for low-noise traveling-wave tubes. Techn. Rep. No. 308—2 (1957), Stanford Electronics Laboratories, Stanford University, Cal.
- [4] BRANCH, G. M. und MIHRAN, T. G., Plasma frequency reduction factors in electron beams. Transact. Inst. Radio Engrs. PGED-2 [1952], 3—11.
- [5] HECHTEL, J. R., Ein Widerstandsnetzwerk zur Lösung der Poissonschen Gleichung. Telefunken-Röhre, H. 32 [1955], 38—46.
- [6] NICLAS, K.-B., Die Transformation von Elektronenwellen in rauscharmen Strahlerzeugungssystemen für Wanderfeldröhren. Dissertation Techn. Hochschule Aachen, Mai 1960, Telefunken-Röhre, H. 40 [1961], 91—168.
- [7] SMULLIN, L. D., Propagation of disturbances in one-dimensional accelerated electron streams. J. appl. Phys. **22** [1951], 1496—1498.
- [8] BLOOM, S. und PETER, R. W., Transmission line analog of a modulated electron beam. RCA Rev. **15** [1954], 95—112.
- [9] NICLAS, K.-B., Beitrag zur Theorie der minimalen Rauschzahl von rauscharmen Wanderfeldröhren. A.E.Ü. **15** [1961], 101—107.
- [10] PIERCE, J. R., Traveling-wave tubes. D. van Nostrand Co., New York 1950.
- [11] HAHN, W. C., Small signal theory of velocity-modulated electron beams. General Electric Rev. **42** [1939], 258—270.
- [12] RAMO, S., The electron-wave theory of velocity modulated tubes. Proc. Inst. Radio Engrs. **27** [1939], 757.
- [13] BLOOM, S. und PETER, R. W., A minimum noise figure for the traveling-wave tube. RCA Rev. **15** [1954], 252—267.

Zuschrift zum Beitrag

J. VRATSANOS, Zur Berechnung der Stromverteilung in einem linearen Netzwerk

(A.E.Ü. Band 11 [1957], Heft 2, Seiten 76—80)

Im Jahre 1957 veröffentlichte J. VRATSANOS [1], [2] den Satz, daß in einem Netz von linearen Scheinwiderständen die Beziehung

$$i^2 = I^2 \frac{\partial R}{\partial r} \quad (1)$$

gilt. In seiner Bezeichnungsweise bedeuten i und r Strom und Widerstand in einem beliebigen Zweig, und I und R Strom und Widerstand am Netzeingang.

Der Beweis erfolgt mittels der Maschengleichung und wurde vielfach als umständlich empfunden ([3]—[7]). Es ist außerdem auszusagen, daß der Gültigkeitsbereich nicht diskutiert ist: es ist nicht sofort ersichtlich, daß Gl. (1) nämlich auch noch gilt, wenn das Netz andere Elemente enthält, zum Beispiel ideale Übertrager, solange nur der Vierpol, der durch Entfernung von r entsteht, reziprok ist [5].

Die folgende kurze Ableitung wurde von mir im Anhang zu einer viel früher veröffentlichten Arbeit gegeben [8], in der Gl. (1) als Hilfssatz verwendet wurde:

Bezeichnet man die Spannung mit V und v , so kann man das folgende Differential als Determinante schreiben:

$$I^2 d \left(\frac{V}{I} \right) = \begin{vmatrix} dV & dI \\ V & I \end{vmatrix}. \quad (2)$$

V und I können durch v und i mittels der A -Matrix des Vierpoles ausgedrückt werden. Aus der Matrizentheorie ist bekannt, daß die Determinante des Matrix-Produktes

gleich dem Produkt der Matrix-Determinanten ist. Nun ist für reziproke Vierpole die Determinante der A -Matrix gleich eins, so daß

$$\begin{vmatrix} dV & dI \\ V & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dv & di \\ v & i \end{vmatrix} = i^2 d \left(\frac{v}{i} \right). \quad (3)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ersieht man, daß nach Division von Gl. (2) durch Gl. (3) und einem Grenzübergang sich Gl. (1) zwanglos ergibt und den Zusammenhang zwischen dem J. VRATSANOS zugeschriebenen Satz und der Vierpolreziprozität zeigt.

Eingegangen am 24. Juli 1961.

R. G. DE BUDA,
Canadian General Electric Co. Ltd.
Toronto 4, Ont., Canada.

Schrifttum

- [1] VRATSANOS, J., Zur Berechnung der Stromverteilung in einem linearen Netzwerk. A.E.Ü. **11** [1957], 76—80.
- [2] VRATSANOS, J., Calculation of current distribution in a linear network. Referat von [1] in Transact. Inst. Radio Engrs. CT-4 [1957], 294.
- [3] ANSELL, H. G., Vratsanos theorem. Transact. Inst. Radio Engrs. CT-5 [1958], 143.
- [4] DEARDS, S. R., Vratsanos theorem. Transact. Inst. Radio Engrs. CT-5 [1958], 143—144.
- [5] JANSON, S. und WALDELIUS, E., Zuschrift in A.E.Ü. **12** [1958], 478.
- [6] LOUIS, S., Zuschrift in A.E.Ü. **12** [1958], 478—479.
- [7] BAR-DAVID, I., Zuschrift in A.E.Ü. **12** [1958], 480.
- [8] DE BUDA, R. G., Zur Frage der Entzerrung eines Impulsverstärkers. Österr. Ing. Archiv **5** [1951], 74—80.

BUCHBESPRECHUNGEN

W. Espe, Werkstoffkunde der Hochvakuum-technik, Band II. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960, 730 Seiten, 875 Bilder, 18 cm × 24,5 cm, Kunstleder, DM 145,—.

Die Fachwelt wird es dankbar begrüßt haben, daß der zweite Band der Werkstoffkunde der Hochvakuumtechnik von W. ESPE schon ein Jahr nach dem Erscheinen des ersten Bandes zur Verfügung steht. Mit großer Sorgfalt hat der Autor in diesem Werk, gestützt auf seine eigenen Erfahrungen, die in der Vielzahl von Zeitschriften und Katalogen veröffentlichten Ergebnisse über Silikatwerkstoffe zusammengetragen.

Die ziemlich erschöpfende Darstellung der silikathaltigen Isolierstoffe, zu denen Glas, Quarzglas, Keramiken, Glimmer und Asbest gehören, behandelt besonders ausführlich — nach einer Einführung über die Gewinnung und Zusammensetzung der Werkstoffe — deren physikalische, chemische und vakuumtechnische Eigenschaften, insbesondere der Gläser. Dabei sind die für die Technologen so wichtigen Daten europäischer und amerikanischer Gläser und Keramiken in übersichtlicher Tabellenform dargestellt. Auch die bereits im Handel nicht mehr erhältlichen Glasarten geben dem Leser einen wertvollen Rückblick auf die technische Entwicklung der vergangenen Jahrzehnte. Weiter dürften die geschilderten Verarbeitungs-

verfahren und -maschinen zur Herstellung der Fertigprodukte dem Leser durch die zahlreichen Illustrationen einen lebhaften Eindruck vom Stand der Technik vermitteln.

Besondere Beachtung verdient das Kapitel über die Oberflächenbehandlung von Glas. Hier bringt der Autor nicht nur die technologischen Verfahren zum Reinigen und Polieren des Glases, sondern auch die umfangreichen und in neuerer Zeit besonders an Bedeutung gewinnenden Methoden und Geräte zur Herstellung leitfähiger und isolierender Schichten auf Glas (z. B. Aufdampfen, Aufstäuben und Auftragen).

Im Kapitel über Quarzglas findet man weiterhin eine Behandlung der Werkstoffe Quarzglas und Vycorglas, während aus dem Abschnitt über die Keramiken neben den ausführlicher dargestellten Silikatkeramiken (Mischungen von Metalloxyden mit glasartigen, silikathaltigen Fluß- und Bindemitteln) auch einige Paragraphen zu erwähnen sind, die sich mit den Reinoxidkeramiken (Al_2O_3 , MgO , ZrO_2 , BeO , ThO_2 , $\text{MgO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3$) befassen. Das Werk wäre unvollständig ohne die Kunde über den für die Elektronenröhren-Herstellung so wichtigen Werkstoff Glimmer (Naturglimmer und synthetischer Glimmer) und schließt mit den auf einigen Seiten zusammengefaßten Kenntnissen über Asbest.

Auch der zweite Band der Werkstoffkunde der Hochvakuumtechnik, der vom Verlag in vorzüglicher Aufmachung herausgebracht wurde, dürfte ein wertvoller Ratgeber für den Ingenieur und Physiker sein, die nunmehr sicher voller Erwartung dem geplanten Band über Metall-Glas-Keramik-Verbindungen entgegensehen.

H.-J. SCHÜTZE

Mikrowellenröhren, Vorträge der Internationalen Tagung „Mikrowellenröhren“ (Band 22 [1961] der Nachrichtentechnischen Fachberichte). Verlag F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1961, XI, 608 Seiten, 1110 Bilder, DIN A 4, Ganzleinen, DM 210,— (für Studierende, NTG/VDE-Mitglieder DM 189,—).

Dieser umfangreiche Tagungsbericht enthält in 138 Beiträgen die wesentlichsten Vorträge der dritten internationalen Tagung „Mikrowellenröhren“ in München (7. bis 11. Juni 1960), zu der etwa 600 Teilnehmer aus 20 Ländern gekommen waren.

Die Beiträge — Übersichten wie Originalmitteilungen — sind in der vom Vortragenden gewählten Sprache wiedergegeben: 91 Beiträge in Englisch, 17 in Französisch, 30 in Deutsch.

Nach der Gruppe a) mit den Übersichtsvorträgen W. Gerlach, Die Geschichte des Elektrons, W. E. Willshaw, A survey of the present day position on the generation and amplification of millimetre waves, P. Guénard, Lignes à retard pour tubes électroniques, E. L. Ginzton, The proposed three-kilometer linear electron accelerator at Stanford University, F. W. Gundlach, Dichtegesteuerte Röhren bei endlichen Laufzeiten

auf den Seiten 1—40 folgen die Gruppen

- b) Klystrons (9 Vorträge, Seiten 41—86),
- c) Wanderfeldröhren (7 Vorträge, Seiten 87—112),
- d) »O«-Typ Rückwärtswellenröhren (4 Vorträge, Seiten 113—124),
- e) »M«-Typ Verstärker und Rückwärtswellenröhren (11 Vorträge, Seiten 125—184),
- f) Magnetrons (9 Vorträge, Seiten 185—221),
- g) Röhren besonderer Bauart (8 Vorträge, Seiten 223—253),
- h) Raumladungswellen (6 Vorträge, Seiten 255—289),
- i) Verzögerungsleitungen (8 Vorträge, Seiten 291—318),
- j) Molekularverstärker (4 Vorträge, Seiten 319—331),
- k) Parametrische Verstärker (5 Vorträge, Seiten 333—345),
- l) Parametrische Verstärker mit Elektronenstrahlen (13 Vorträge, Seiten 347—390),
- m) Rauschen (11 Vorträge, Seiten 391—439),
- n) Strahlerzeugung und Strahlfokussierung (14 Vorträge, Seiten 441—512),
- o) Gasentladungen (7 Vorträge, Seiten 513—532),
- p) Ionenschwingungen, Plasma (7 Vorträge, Seiten 533—558),
- q) Technologie (10 Vorträge, Seiten 559—608).

Der Band gibt eine hervorragende Übersicht über den Stand und die Entwicklungsprobleme der Mikrowellenröhren.

F. RÜHMANN

A. Rohrberg, Wegweiser durch die Mathematik. 3. erweiterte und verbesserte Auflage. Fachverlag Schiele & Schön GmbH, Berlin 1961.

Band 1: Elementare Mathematik. 296 Seiten, 133 Bilder, DIN A 5, Halbleinen DM 14,60.

Band 2: Höhere Mathematik. 372 Seiten, 192 Bilder, DIN A 5, Halbleinen DM 16,80.

Der Besprechung der 2. Auflage* ist nur hinzuzufügen, daß der Verfasser weitere Wünsche aus dem Leserkreis beachtet hat. So sind die Vorschriften der Deutschen Normen über die mathematischen Zeichen beachtet, und ein Kapitel über Matrizen ist hinzugefügt worden. Die Zahlen im Sachverzeichnis bezeichnen in dieser Auflage die Seiten und nicht mehr die Abschnittsnummern, so daß eine schnelle Orientierung noch leichter erfolgen kann als bei den vorhergehenden Auflagen.

A. THOMA

* A.E.Ü. 13 [1959], 372.

Mitarbeiter dieses Heftes:

Dr. W. Becker, im Max-Planck-Institut für Aeronomie, Institut für Ionosphären-Physik, Lindau ü. b. Northeim/Hann.; Dr. R. G. de Buda, c/o Canadian General Electric Co. Ltd., E. E. & T. D., Royce Works, 830 Lansdowne Ave, Toronto 4, Canada; Dr. W. Heinlein, i. H. Siemens & Halske AG, Zentral-Laboratorium, München 25, Hofmannstraße 51; Dr. K.-B. Niclas, i. H. Telefunken GmbH., Röhrenentwicklung, Ulm (Donau), Söflinger Straße 100; Dr. H. Pözl, im Institut für Hochfrequenztechnik der Technischen Hochschule, Wien IV/50, Gußhausstraße 25; Dr. H.-J. Schütze, i. H. Telefunken GmbH., Röhrenentwicklung, Ulm (Donau), Söflinger Straße 100; Dr. F. Schwing, i. H. Telefunken GmbH., Ulm (Donau), Elisabethenstraße 3; Dipl.-Ing. W. Thommen, im Institut für höhere Elektrotechnik der E.T.H., Zürich 7, Gloriastraße 35.

Alle Rechte, auch die der photomechanischen Wiedergabe, sind vorbehalten, jedoch wird gewerblichen Unternehmen die Anfertigung einer photomechanischen Vervielfältigung (Photokopie, Mikrokopie) von Beiträgen oder Beitragsteilen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens gegen Bezahlung der dort vorgesehenen Gebühren an die Inkassostelle für Photokopiergebühren beim Börsenverein des Deutschen Buchhandels, Frankfurt am Main, gestattet. Werden die Gebühren durch Wertmarken der Inkassostelle entrichtet, so ist für jedes Photokopierblatt eine Marke im Betrag von —,30 DM zu verwenden.

© 1961 S. Hirzel Verlag Stuttgart. Printed in Germany. Satz und Druck: K. Triltsch, Graphischer Großbetrieb, Würzburg.



SEL

Weltweit und aufgeschlossen



Die Standard Elektrik Lorenz AG ging aus den namhaften deutschen Firmen Lorenz, Mix & Genest, Schaub und SAF hervor. Ihr stehen alle Erfahrungen der vielen Tausend Wissenschaftler zur Verfügung, die in 24 Ländern für die weltumspannende International Telephon & Telegraph Corporation (ITT) arbeiten; 130 000 Mitarbeiter stehen Ihnen dabei zur

Seite. Allein in den 18 Werken der Standard Elektrik Lorenz AG forschen, entwickeln und produzieren mehr als 26 000 Menschen für die ganze Nachrichtentechnik.

Standard Elektrik Lorenz AG · Stuttgart

... die ganze Nachrichtentechnik!

